Spis treści

1 Metoda geometryczna

1.1 Wstęp

Metoda zwaną również graficzną polega na znalezieniu rozwiązania zagadnienia programowania liniowego wśród wierzchołków wieloboku powstałego przez ograniczenia i warunki brzegowe. Jest przydatna tylko dla zadań z małą ilością zmiennych decyzyjnych.

1.2 Przykładowe zadanie

W celu zrozumienia metody rozwiążmy proste zadanie:

Aby zdrowo wyglądać pies musi miesięcznie zjeść przynajmniej 100g składnika 1 (S1), 200g składnika 2 (S2) i nie więcej jak 300g składnika 3 (S3). Na rynku dostępne są dwie karmy, gdzie porcja karmy 1 (K1) zawiera 10g składnika 1, 1g składnika 2 i 10g składnika 3. Natomiast karma 2 (K2) zawiera 1g składnika 1, 10g składnika 2 i 10g składnika 3.
Porcja karmy 1 (K1) kosztuje 5 zł, natomiast porcja karmy 2(K2) 8zł.
W jakich porcjach zmieszać karmy aby pies dostał składników ile potrzeba a koszt był jak najmniejszy?

Na początek zestawmy dane w tabelkę:

	K1	K2	
S1	10	1	100
S2	1	10	200
S3	10	10	300
	5	8	

Tabelka.1. Tabelka z danymi zadania

Na podstawie tabelki łatwo ustalimy funkcję celu, która dąży do minimum (chcemy uzyskać minimalny koszt):
(granatowy wiersz tabelki)
$F(x) = \mathbf{5}x_1 + \mathbf{8}x_2$ --> MIN

Nastęnie należy napisać nierówności dla każdego ze składników:
(lewa strona nierówności to zielona część tabelki, prawa - pomarańczowa)
$\mathbf{10}x_1 + \mathbf{1}x_2 >= \mathbf{100}$
$\mathbf{1}x_1 + \mathbf{10}x_2 >= \mathbf{200}$
$\mathbf{10}x_1 + \mathbf{10}x_2 <= \mathbf{300}$

oraz ograniczenia postawione rozwiązaniu:
$x_1 >= 0$, $x_2 >= 0$

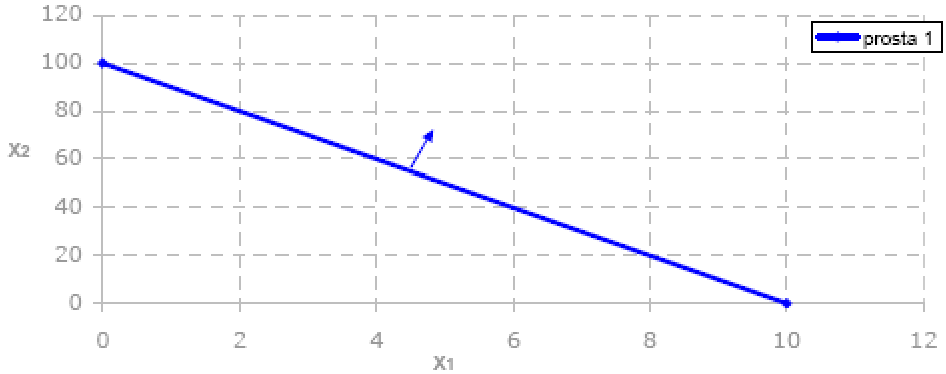
W następnym kroku ustalamy gradient dla funkcji celu:
$F(x) = 5x_1 + 8x_2$ --> MIN
gradient: $[x_1=5, x_2=8]$

Krok kolejny to przekształcenie nierówności w równania i wyznaczenie punktów przecięcia z osiami x_1 i x_2.
(1) $10x_1 + 1x_2 = 100$ zakładam, że $\mathbf{x_2=0}$ stąd $\mathbf{x_1=10}$; teraz $\mathbf{x_1=0}$ stąd $\mathbf{x_2=100}$
(2) $1x_1 + 10x_2 = 200$ zakładam, że $\mathbf{x_2=0}$ stąd $\mathbf{x_1=200}$; teraz $\mathbf{x_1=0}$ stąd $\mathbf{x_2=20}$
(3) $10x_1 + 10x_2 = 300$ zakładam, że $\mathbf{x_2=0}$ stąd $\mathbf{x_1=30}$; teraz $\mathbf{x_1=0}$ stąd $\mathbf{x_2=30}$

Tak wyliczone punkty nanosimy na wykres. Zacznijmy od prostej dla równania 1:
punkt 1 - [10,0]
punkt 2 - [0,100]

Po narysowaniu prostej musimy wybrać półpłaszczyznę albo nad albo pod prostą. Jeżeli nierówność odpowiadająca prostej zawiera znak mniejszości < wybieramy półpłaszczyznę od strony początku układu współrzędnych (punkt [0,0]). Jeżeli zawiera znak większości > wybieramy półpłaszczyznę przeciwną.

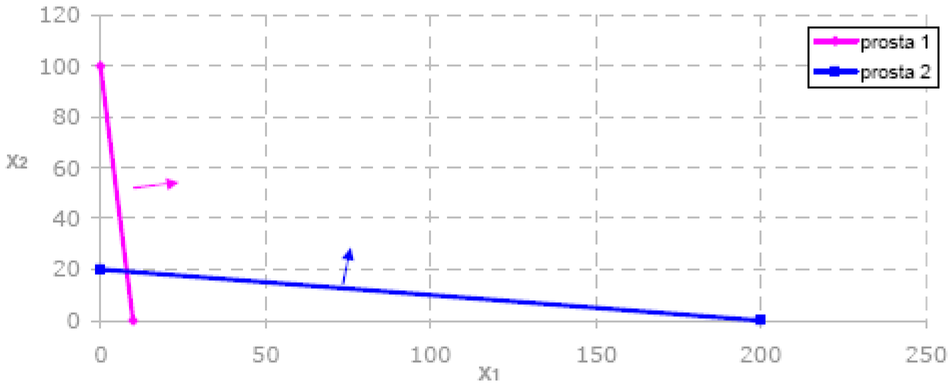
Prostej 1 odpowiada pierwsza nierówność ze znakiem większości > - wybieramy płaszczyznę bez punktu [0,0].



Wykres.2. Naniesiona prosta 1

Nastęnie prosta dla równania 2:
punkt 1 - [200,0]
punkt 2 - [0,20]

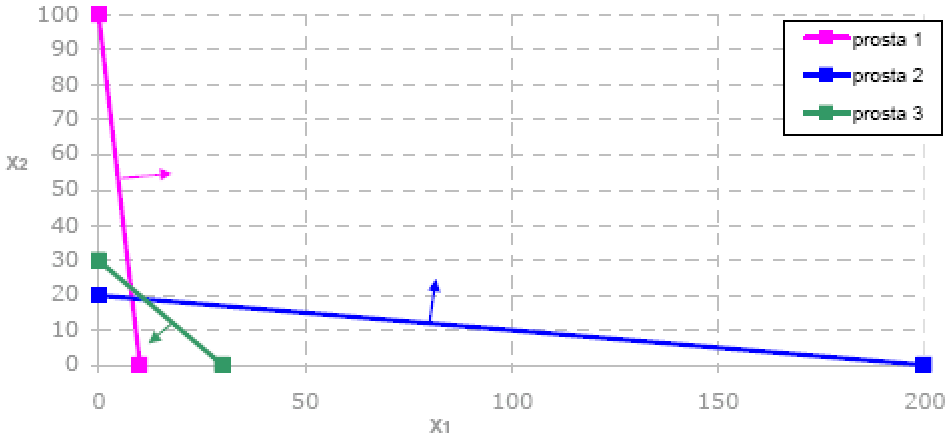
Prostej 2 odpowiada druga nierówność ze znakiem większości > - wybieramy płaszczyznę bez punktu [0,0].



Wykres.3. Naniesiona prosta 2

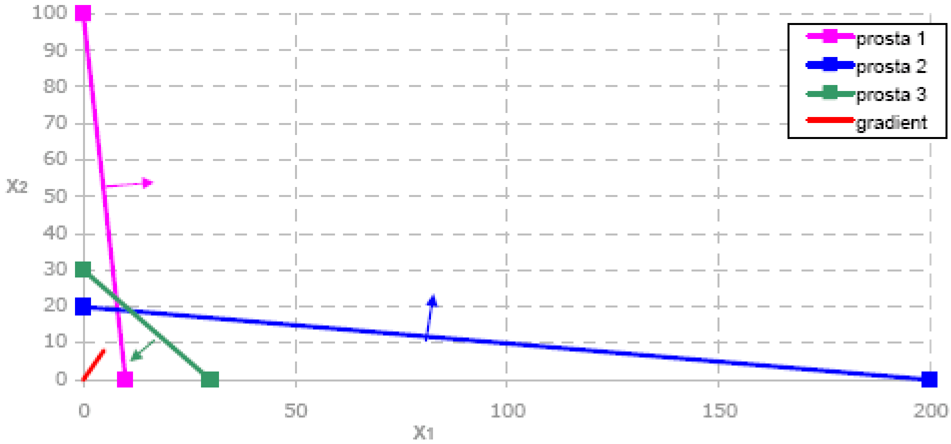
Prosta dla równania 3:
punkt 1 - [30,0]
punkt 2 - [0,30]

Prostej 3 odpowiada trzecia nierówność ze znakiem mniejszości < - wybieramy płaszczyznę z punktem [0,0].



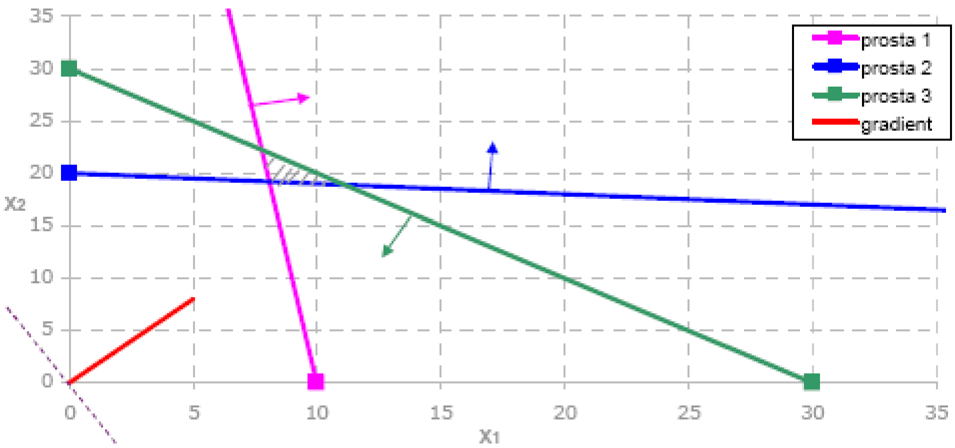
Wykres.4. Naniesiona prosta 3

Mając już narysowane proste nanosimy na wykres gradient.
Gradient dll funkcji celu:
punkt 1 - [0,0]
punkt 2 - [5,8]



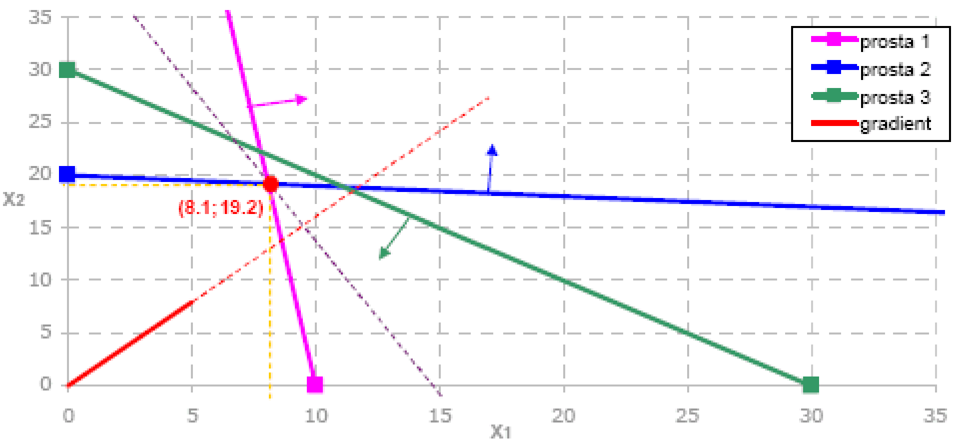
Wykres.5. Naniesiony gradient

Poniżej widać nieco powiększone zdjęcie. Narysowane proste utworzyły mały trójkąt. Właśnie jeden z wierzchołków tego trójkąta będzie rozwiązaniem naszego zadania. Aby przekonać się który, musimy poprowadzić jeszcze jedną prostą prostopadłą do gradientu i zaczepioną w punkcie [0,0].



Wykres.6. krok 1

Ostatni krok. Przesuwamy ostatnio nakreśloną prostą prostopadle do gradienta w górę (możemy przedłużyć nieco gradient jeśli trzeba) do pierwszego napotkanego wierzchołka naszego trójkąta (w przypadku f-kcji celu dążącej do maksimum przesuwamy prostą do ostatniego napotkanego wierzchołka). Po czym odczytujemy wartości z osi x_1 i osi x_2 dla tego wierzchołka, które to wartości są rozwiązaniem zadania.



Wykres.7. krok 1

W celu otrzymania dokładnego wyniku obliczamy układ równań dla prostych, które przecinają się w wyznaczonym wierzchołku:
(1) $10x_1 + 1x_2 = 100$
(2) $1x_1 + 10x_2 = 200$

(1) $x_2 = 100-10x_1$
(2) $x_1 + 10*(100-10x_1) = 200$

$x_1-100x_1 = 200-1000$
$x_1 = 800/99 = 8.08$

$x_2 = 100-10*8.08 = 19.19$

Koszt = $5x + 8x_2$ = 5*8.08 + 8*19.19 = 193.92

Należy zmieszać 8.08 porcji karmy 1 i 19.19 porcji karmy 2. Mieszanka ta będzie kosztowała 193.92 zł.

2 Metoda simpleks

2.1 Wstęp

Metoda ta pomaga w podjęciu takiej decyzji, która pozwoli przy ograniczonych zasobach osiągnąć maksymalne korzyści (minimalizacja kosztów lub maksymalizacja zysków).

Rozwiązanie, które uwzględnia nałożone ograniczenia nazywać będziemy rozwiązaniem dopuszczalnym. Uzyskawszy rozwiązanie dopuszczalne - ulepszamy je tworząc kolejne o mniejszym koszcie (większym zysku). Może więc być ich wiele, przy czym każde kolejne powinno charakteryzować się lepszym wynikiem a przynajmniej nie gorszym. Naszym celem jest otrzymać rozwiązanie dopuszczalne, którego wynik jest możliwie najlepszy i takie rozwiązanie nazywać będziemy rozwiązaniem optymalnym.

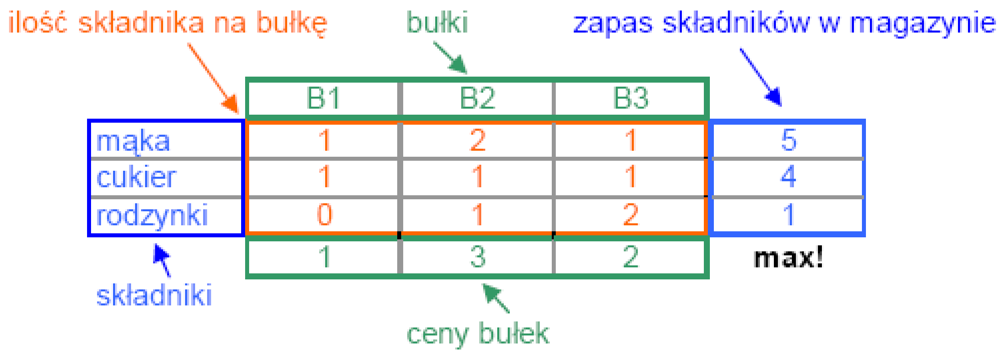
Kolejne kroki jakie należy wykonać w metodzie simpleks:
krok.1. Doprowadzenie zadania do postaci standardowej
krok.2. Doprowadzenie zadania do postaci kanonicznej
krok.3. Doprowadzenie zadania do bazowej postaci kanonicznej
krok.4. Przygotowanie tabelki metody simpleks na wyniki
krok.5. Wyliczenie wskaźników optymalności
krok.6. Sprawdzenie optymalności rozwiązania

Jeżeli rozwiązanie nie jest optymalne:
krok.7. Znalezienie kryterium wejściowego i wyjściowego
krok.8. Zamiana zmiennej bazowej wyjściowej na zmienną nie bazową wejściową
krok.8. Zaktualizowanie tabeli wg nowej bazy
krok.8. Powrót do kroku 5

2.2 Przykładowe zadanie

Rozwiążmy następujące zadanie metodą simpleks.
Piekarnia produkuje 3 rodzaje bułek (B1, B2, B3), które odpowiednio kosztują 1, 3 i 2 złote.
Na wypiek bułki pierwszej (B1) potrzeba 1 dkg mąki, 1 dkg cukru.
Na wypiek bułki drugiej (B2) potrzeba 2 dkg mąki, 1 dkg cukru i 1 dkg rodzynek.
Bułka trzecia (B3) wymaga 1 dkg mąki, 1 dkg cukru i 2 dkg rodzynek.
Przy czym w magazynie piekarni dostępne jest tylko 5 dkg mąki, 4 dkg cukru i 1 dkg rodzynek.
Nasze zadanie polega na ustaleniu ile i jakich bułek powinniśmy upiec aby otrzymać największy zysk, biorąc pod uwagę ograniczone zapasy składników.

Na początek trzeba prawidłowo wypełnić tabelkę z danymi (Tabelka.1.)



Tabelka.1. Dane do zadania

Następnie należy doprowadzić zadanie do postaci standardowej:

Mając prawidłowo zestawioną tabelkę nie ma najmniejszego problemu z ułożeniem układu w postaci standardowej.

-> Najpierw układamy funkcję celu.
Naszym celem jest odpowiedź na pytanie: ile upiec pierwszych bulek B1 (x_1), ile drugich B2 (x_2) a ile trzecich B3 (x_3) aby otrzymać maksymalny zysk ?.
Cel dotyczył będzie kosztów - interesuje więc nas ostatni wiersz tabelki.
Przemnażamy nasze niewiadome x_1, x_2, x_3 (ilości bułek) przez ich ceny (ostatni wiersz: 1, 3, 2), które po zsumowaniu mają nam dać jak największą wartość.
$1x_1 + 3x_2 + 2x_3$ --> MAX

-> Następnie sporządzamy układ nierówności.
W tym miejscu nałożymy ograniczenia na zużycie podczas wypieku składników do ilości jaka jest dostępna w magazynie piekarni. Wykorzystamy dane z wnętrza tabelki (pomarańczowa część), które przemnożymy przez szukane niewiadome (x_1, x_2, x_3). Poczym nałożymy ograniczenie, że suma ich nie może być większa niż zapas w magazynie (ostatnia kolumna oznaczona na niebiesko).

$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 <= 5$
$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 <= 4$
$0x_1 + 1x_2 + 2x_3 <= 1$

-> Na koniec nakładamy ograniczenia na rozwiązanie.
Logicznym jest, że nie możemy upiec minus 5 bułek - dlatego zakładamy, że rozwiązanie będzie większe lub równe zero.
$x_1 >= 0$, $x_2 >= 0$, $x_3 >= 0$

Ostatecznie - postać standardowa układu
$1x_1 + 3x_2 + 2x_3$ --> MAX

$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 <= 5$
$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 <= 4$
$0x_1 + 1x_2 + 2x_3 <= 1$

$x_1 >= 0$, $x_2 >= 0$, $x_3 >= 0$

Kolejny krok to doprowadzenie do postaci kanonicznej układu:

W tym kroku pozbywamy sie wszystkich nierówności. Zrobimy to poprzez dodanie do naszych nierówności zmiennych swobodnych x_4, x_5, x_6. Zmienne te dodajemy również do funkcji celu - jednak nie wpłyną a one na wartość zysku gdyż dodawane są ze współczynnikiem = 0.

Postać kanoniczna układu

$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$ --> MAX

$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + x_4 = 5$

$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + x_5 = 4$

$0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + x_6 = 1$

$x_1 >= 0, x_2 >= 0, x_3 >= 0, x_4 >= 0, x_5 >= 0, x_6 >= 0$

Na koniec doprowadzamy do bazowej postaci kanonicznej układu:

W tym miejscu należy upewnić się, czy każde z równań posiada dodatkową zmienną (oprócz x_1, x_2, x_3) z dodatnim współczynnikiem = 1.

Po czym wstawiamy do każdego równania zmienne występujące w pozostałych równaniach. Dodajemy je ze współczynnikiem = 0, w kolejności od najmniejszego do największego indeksu.

Bazowa postać kanoniczna układu

$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$ --> MAX

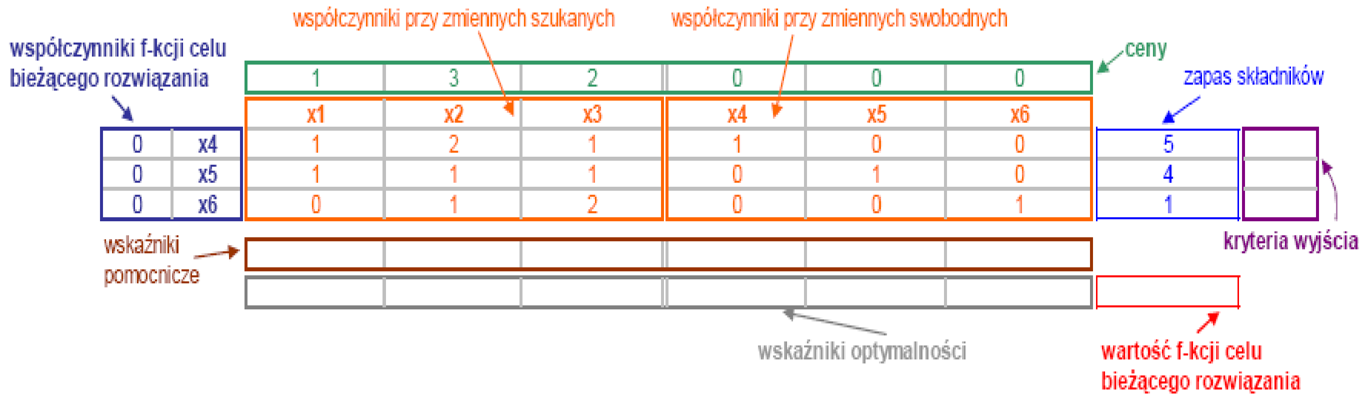
$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 5$

$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 4$

$0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 1$

$x_1 >= 0, x_2 >= 0, x_3 >= 0, x_4 >= 0, x_5 >= 0, x_6 >= 0$

Teraz możemy przystąpić do tworzenia tabelki metody simleks



Tabelka.2. Tabelka metody simpleks

Tabelkę wypełniamy na podstawie bazowej postaci kanonicznej układu.
Pierwszy wiersz (kolor zielony) to przepisane współczynniki funkcji celu. W drugi wiersz tabelki (pierwszy pomarańczowy wiersz) wpisujemy nazwy wszystkich zmiennych. Kolejne pomarańczowe wiersze wypełniamy liczbami stojącymi przy tych zmiennych w równaniach - odpowiednio pierwszy pusty wiersz (trzeci od góry tabelki) to pierwsze równanie, drugi wiersz - drugie równanie, itd.

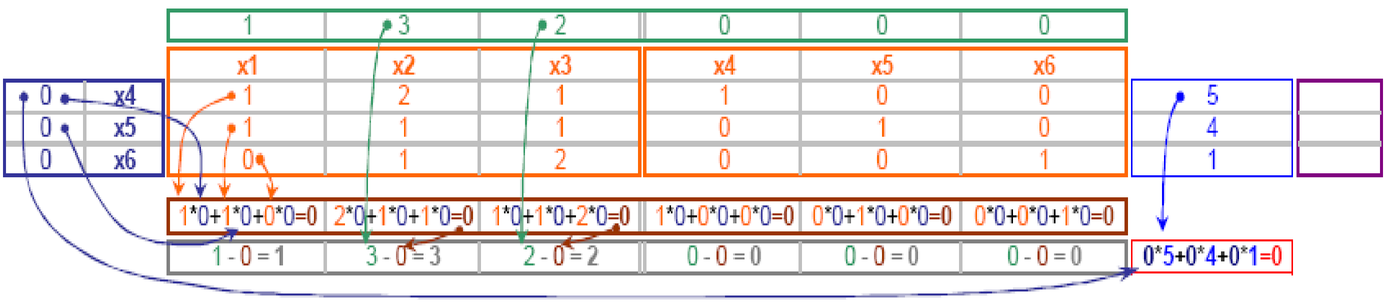
Przedostatnią kolumnę (kolor niebieski, po prawej) wypełniamy liczbami stojącymi po prawej stronie równań.

Zostały nam jeszcze do wypełnienia dwie pierwsze kolumny (kolor granatowy, po lewej). Pierwszą wypełniamy liczbami stojącymi przy zmiennych swobodnych w funkcji celu, natomiast drugie ich nazwami.

Dwa ostatnie wiersze (brązowy, szary i czerwona komórka) oraz ostatnią kolumnę (fioletową) pozostawiamy na razie puste.

Mając przygotowaną tabelkę bierzemy się za obliczenia

Krok.1.



Tabelka.3. Tabelka metody simpleks

W pierwszym kroku należy wyliczyć dwa ostatnie wiersze.
Pierwszy z nich wyliczamy jako iloczyn skalarny pierwszej kolumny po lewej (granatowy kolor) oraz kolejnej kolumny współczynników (kolor pomarańczowy). Na początek wszystkie wyszły = 0.

Ostatni wiersz - **wskaźniki optymalności** - liczymy odejmując od cen (kolor zielony) wiersz poniżej cen (kolor brązowy) z wyliczonymi przed chwilą wartościami. Wskaźniki te pozwalają nam określić czy dane rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym.
Jeżeli wszystkie wskaźniki będą niedodatnie w przypadku maksymalizacji f-kcji celu lub nieujemne dla minimalizacji f-kcji celu.

Pozostała ostatnia komórka do wyliczenia (czerwony kolor) - **jest to wartość funkcji celu dla bieżącego rozwiązania**. Obliczamy ją jako wektor skalarny pierwszej kolumny (granatowy kolor) i kolumny przedostatniej (niebieski kolor).

Ponieważ współczynniki optymalności mają wartości dodatnie - **rozwiązanie nie jest optymalne**.

Krok.2.

Kolejny krok to znalezienie największej wartości w ostatnim wierszu (szarym - wskaźniki optymalności) w przypadku maksymalizacji funkcji celu, lub najmniejszej w przypadku jej minimalizacji. Maksymalizujemy f-kcję celu więc szukamy maksymalnego wskaźnika optymalności (kryterium wejścia). Jest to wartośc = 3. Po czym zaznaczamy całą kolumnę, w której znaleźliśmy max. wskaźnik.

Następnie wyliczamy kryteria wyjścia (ostatnia, fioletowa kolumna) jako iloraz elemntu z niebiskiej kolumny i z kolumny, którą wcześniej zaznaczyliśmy.

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
0	x4	1	2	1	1	0	0	5	5/2=2.5
0	x5	1	1	1	0	1	0	4	4/1=4
0	x6	0	1	2	0	0	1	1	1/1=1
		0	0	0	0	0	0		
		1	3	2	0	0	0	0	

MAX
kryterium wejścia
wskaźniki optymalności

Tabelka.4. Tabelka metody simpleks

Krok.3.

W kroku trzecim szukamy najmniejszej wartości w ostatniej kolumnie (fioletowej - kryterium wyjścia). Bierzemy pod uwagę tylko wartości nieujemne. Następnie zaznaczamy cały wiersz, w którym znaleźliśmy kryterium wyjścia.

Wiemy teraz, jaką zmienną nie bazową opłaca się wprowadzić do bazy. Inaczej mówiąc - jaką zmienną koloru pomarańczowego wprowadzić do kolumny granatowej (po lewej stronie).

Wymieniamy zmienną bazową (kolumna granatowa) znajdującą się w zaznaczonym wierszu (jest nią x_6) na zmienną nie bazową (wiersz pomarańczowy) znajdującą się w zaznaczonej kolumnie (jest nią x_2). Wraz z zmienną przenosimy odpowiadający jej współczynnik z f-kcji celu (wartość z zielonego wiersza).

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
0	x4	1	2	1	1	0	0	5	2.5
0	x5	1	1	1	0	1	0	4	4
3	x2	0	1	2	0	0	1	1	1
									kryterium wyjścia
		0	0	0	0	0	0		MIN
		1	3	2	0	0	0	0	

Tabelka.5. Tabelka metody simpleks

Krok.4.

Mamy już nową bazę. Należy teraz dla niej odświerzyć tabelkę. Na początek wykasujmy nieaktualne już dane z dwóch ostatnich wierszy i z ostatniej kolumny.

Najpierw zaktualizujemy współczynniki (pomarańczowy kolor) oraz niebieską kolumnę po prawej stronie.

etap.1.
Zacznijmy od wiersza, w którym znaleĽliśmy kryterium wyjścia. Obliczamy w nim nowe wartości jako iloraz wartości z kolejnej komórki tego wiersza przez wartość z komórki znajdującej się na przecięciu wiersza ze znalezionym kryterium wyjścia i kolumny ze znalezionym kryterium wejścia
(Tabelka.6. etap.1.).

etap.2.
Przejdźmy teraz wiersz wyżej. Tutaj współczynniki wyliczamy nieco inaczej mianowicie: odejmujemy od kolejnej komórki tego wiersza iloczyn wartości znajdującej się na przecięciu tego wiersza i kolumny, w której znaleźliśmy kryterium wejścia oraz wartości obliczonych w etapie 1 (wartości z nowej tabelki) - znajdujących się w kolejnych komórkach wiersza, w którym znaleźliśmy kryterium wyjścia (Tabelka.6. etap.2.).

etap.3.
Na tym etapie postępujemy identycznie jak w etapie.2. z tym, że przenosimy się wiersz wyżej (Tabelka.6. etap.3.)

tabelka ze starym rozwiązaniem

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
0	x4	1	2	1	1	0	0	5	
0	x5	1	1	1	0	1	0	4	
3	x2	0	1	2	0	0	1	1	

nowa tabelka

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
0	x4	1	2	1	1	0	0	5	
0	x5	1	1	1	0	1	0	4	
3	x2	0/1=0	1/1=1	2/1=2	0/1=0	0/1=0	1/1=1	1\1=1	

Tabelka.6. Etap 1. Tabelka metody simpleks

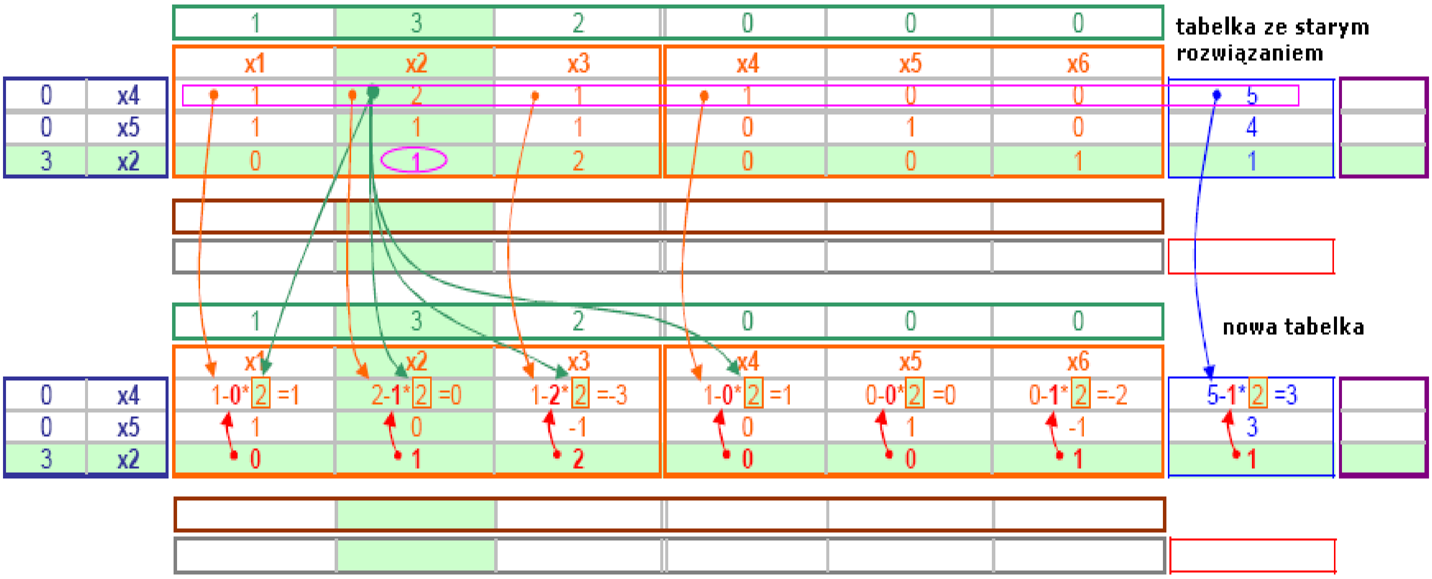
tabelka ze starym rozwiązanien

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
0	x4	1	2	1	1	0	0	5	
0	x5	1	1	1	0	1	0	4	
3	x2	0	1	2	0	0	1	1	

nowa tabelka

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
0	x4	1	2	1	1	0	0	5	
0	x5	1-0* $\boxed{1}$ =1	1-1* $\boxed{1}$ =0	1-2* $\boxed{1}$ =-1	0-0* $\boxed{1}$ =0	1-0* $\boxed{1}$ =1	0-1* $\boxed{1}$ =-1	4-1* $\boxed{1}$ =3	
3	x2	0	1	2	0	0	1	1	

Tabelka.6. Etap 2. Tabelka metody simpleks

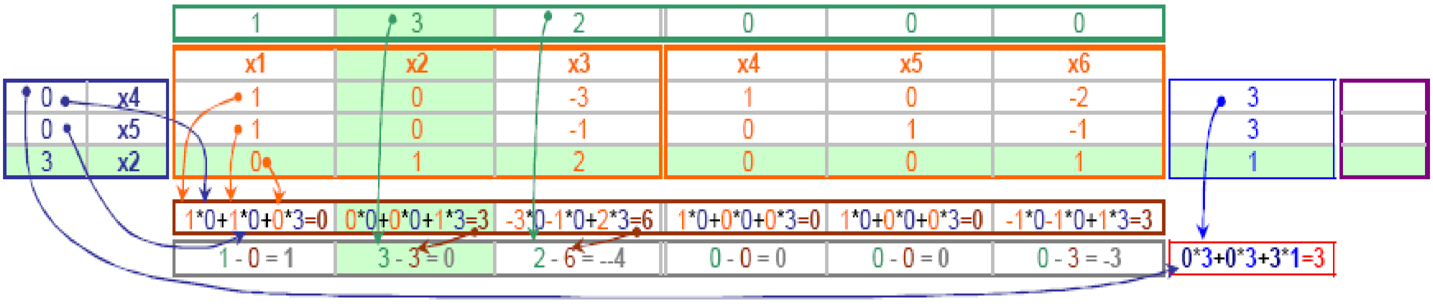


Tabelka.6. Etap 3. Tabelka metody simpleks

Krok.5.

Kolejny krok do wyliczenie wskaźników pomocniczych, wskaźników optymalności oraz wartość f-kcji celu dla bieżącego rozwiązania tak jak zostało to pokazane w kroku.1. (Tabelka.7.)

Ponieważ współczynniki optymalności mają wartości dodatnie - **rozwiązanie nie jest optymalne**.



Tabelka.7. Tabelka metody simpleks

Krok.6.

Szukamy kolejnego rozwiązania. Wymazujemy nieaktualne już zaznaczenie kolumny z kryterium wejścia i wiersza z kryterium wyjścia. Po czym szukamy nowego kryterium wejścia oraz wyliczamy wartości fioletowej kolumny po prawej stronie, wg opisu w kroku.2. (Tabelka.7.)

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
0	x4	1	0	-3	1	0	-2	3	3/1=3
0	x5	1	0	-1	0	1	-1	3	3/1=3
3	x2	0	1	2	0	0	1	1	-
		0	3	6	0	0	3		
		1	0	-4	0	0	-3	3	

MAX (kryterium wejścia)

Tabelka.8. Tabelka metody simpleks

Krok.7.

Teraz należy odszukać kryterium wyjścia i zastąpić zmienną bazową x_4 zmienną nie bazową x_1, wg opisu w kroku.3. (Tabelka.7.)

(kryterium wyjścia) MIN

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
1	x1	1	0	-3	1	0	-2	3	3
0	x5	1	0	-1	0	1	-1	3	3
3	x2	0	1	2	0	0	1	1	-
		0	3	6	0	0	3		
		1	0	-4	0	0	-3	3	

Tabelka.9. Tabelka metody simpleks

Krok.8.

Dalej postępując wg opisu w krokach 4 i 5 otrzymamy w wyniku tabelkę jak poniżej (Tabelka.10.). Zauważmy, że żaden współczynnik nie jest dodatni - wynika stąd, że **otrzymaliśmy rozwiązanie optymalne**

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
1	x1	1	0	-3	1	0	-2	3	3
0	x5	0	-3	2	-1	1	1	0	-
3	x2	0	1	2	0	0	1	1	-
		1	3	3	1	0	1		
		0	0	-1	-1	0	-1	6	

Tabelka.10. Rozwiązanie optymalne

Jak odczytać rozwiązanie?

		1	3	2	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	x5	x6		
1	x1	1	0	-3	1	0	-2	3	3
0	x5	0	-3	2	-1	1	1	0	-
3	x2	0	1	2	0	0	1	1	-
		1	3	3	1	0	1		
		0	0	-1	-1	0	-1	6	
								zysk	

Tabelka.11. Odczytywanie rozwiązania

Aby odczytać rozwiązanie interesować nas będą tylko nazwy zmiennych umieszczone po lewej stronie w granatowej ramce oraz odpowiadające im wartości zawarte w ramce niebieskiej po prawej stronie. Przyda też się ostatnia czerwona komórka zawierająca zysk.

Rozwiązanie:

$x_1 = 3$

$x_5 = 0$

$x_2 = 1$

Reszta zmiennych równa jest zero.

$x_3 = 0$

$x_4 = 0$

$x_6 = 0$

Zysk jaki uzyskaliśmy równy jest 6.

Przy nałożonych ograniczeniach składników powinniśmy upiec 3 bułki I rodzaju (B1) i 1 bułkę rodzaju II (B2) aby otrzymać maksymalny zysk = 6.

3 Problem transportowy

3.1 Wstęp

Rozwiązanie problemu transportowego polega na znalezieniu takiej drogi pomiędzy dostawcami a odbiorcami, której koszt jest jak najniższy - rozwiązanie optymalne.

Mając przed sobą zadanie transportowe - najpierw budujemy rozwiązanie dopuszczalne następnie sprawdzamy czy jest rozwiązaniem optymalnym. Jeżeli nie jest budujemy kolejne rozwiązanie dopuszczalne lepsze od poprzedniego lub przynajmniej nie gorsze. Z nowym rozwiązaniem dopuszczalnym postępujemy jak z poprzednim do momentu otrzymania wyniku optymalnego.

Zagadnienie transportowe rozwiązujemy w następujących krokach:
krok.1. Znalezienie rozwiązania dopuszczalnego jedną z metod: pn.-zach. kąta, najmniejszego elementu, VAM
krok.2. Obliczenie kosztu rozwiązania
krok.3. Sprawdzenie, czy rozwiązanie jest zdegenerowane (czy jest odpowiednia ilość baz)
krok.4. Jeżeli jest niezdegenerowane należy zastosować metodę e-perturbacji
krok.5. Sprawdzenie, czy rozwiązanie jest optymalne metodą potencjałów
krok.6. Jeżeli nie jest optymalne należy stworzyć cykl i zbudować nowe rozwiązanie dopuszczalne
krok.7. Powtarzanie kroków 5 i 6 do momentu otrzymania rozwiązania optymalnego

Rozwiązanie dopuszczalne - rozwiązanie, które w wyniku daje niski koszt ale jest możliwość w prosty sposób uzyskania kosztu niższego. Jest to rozwiązanie przejściowe. Istnieje wiele rozwiązań dopuszczalnych dla jednego zagadnienia transportowego, przy czym każde kolejne ma lepszy (niższy)lub przynajmniej nie gorszy koszt od poprzedniego.

Rozwiązanie optymalne - rozwiązanie, które w wyniku daje koszt najniższy do uzyskania poprzez znane nam metody. Jest to rozwiązanie końcowe. Może istnieć kilka rozwiązań optymalnych dla jednego zagadnienia transportowego - lecz koszt każdego z nich powinien być taki sam.

3.2 Metoda górnego-lewego rogu

Na stronie pokazane zostały obliczenia dla zadania zbilansowanego (zamkniętego) tzn takiego, dla którego suma podaży równa się sumie popytu. W innym wypadku należy najpierw zadanie sprowadzić do zadania zbilansowanego.

Metoda zwana również pn. - zach. kąta. Metodą tą uzyskamy rozwiązanie dopuszczalne zadania transportowego. Nie bierze ona pod uwagę macierzy kosztów przez co koszt rozwiązania jest dość wysoki w porównaniu z pozostałymi metodami.

Wyobraźmy sobie następujące zagadnienie transportowe:
Jesteśmy firmą przewozową (np. oranżady). Czterech producentów oranżady (P1, P2, P3, P4) z różnych miast dysponuje odpowiednio 20, 30, 10 i 40 skrzynkami napoju. Natomiast 5 sklepów (S1, S2, S3, S4, S5) z innych miast chętnie kupią odpowiednio 10, 15, 30, 10 i 35 skrzynek. Mamy jak najmniejszym kosztem porozwozić wszystkie skrzynki, znając koszty drogi od danego producenta (dostawcy) do każdego sklepu (odbiorcy). Koszty te zostały zestawione w tabeli poniżej (Tabelka.1.).

dostawcy

odbiorcy

20	30	10	40		
P1	**P2**	**P3**	**P4**		
5	2	1	5	**S1**	10
3	1	1	4	**S2**	15
1	1	2	3	**S3**	30
2	1	5	1	**S4**	10
2	1	2	6	**S5**	35

koszty

Tabelka.1. Zestawienie danych z zadania w postaci tabelki

Rozwiązanie problemu metodą pn. - zach. kąta:

Na początek musimy przygotować sobie czystą tabelkę o wymiarze m-wierszy na n-kolumn,
gdzie:
m - liczba odbiorców,
n - liczba dostawców.

Dodajemy wiersz u góry z liczbą towaru do dostarczenia (podaż) i kolumnę na końcu z liczbą towaru do odebrania (popyt).

podaż

20	30	10	40	popyt
				10
				15
				30
				10
				35

Tabelka.2. Tabelka na wyniki

Wypełnianie tabelki zaczynamy od pierwszej komórki w górnym, lewym narożniku. Komórce tej odpowiada dana podaż (w komórce powyżej) oraz dany popyt (w ostatniej kolumnie). Wybieramy spośród nich mniejszą wartość i wpisujemy ją do komórki. Następnie należy tę wartość odjąć zarówno od podaży jak i od popytu. Dla pierwszej komórki podaż przyjmuje wartość 20 natomiast popyt 10. Mniejszą spośród nich jest 10 i tą wartość wpisujemy do komórki. Tą samą wartość (10) odejmujemy zarówno od podaży (20-10=10) jak i od popytu (10-10=0) (Tabelka. 3.).

20-10=10

~~20~~	30	10	40	
10				~~10~~ 10-10=0
				15
				30
				10
				35

Tabelka.3. Krok.1. Min(20,10) = 10

Teraz sprawdzamy, gdzie po odjęciu uzyskaliśmy 0 (w podaży czy w popycie). Jeżeli wyzerował się popyt to w danym wierszu wpisujemy w resztę komórek zera. Jeżeli wyzerowałaby się podaż to należałoby wpisać zera w resztę komórek w danej kolumnie. W tym przypadku wyzerował się popyt więc należy wypełnić resztę komórek w wierszu pierwszym zerami (Tabelka. 4.).

10	30	10	40	
10	0	0	0	0
				15
				30
				10
				35

Tabelka.4. Popyt = 0. Zerujemy resztę komórek w wierszu.

Idziemy do kolejnej wolnej komórki, wpisujemy mniejszą wartość z odpowiadających jej popytu i podaży. Pomniejszamy o tą samą wartość odpowiadający komórce podaż i popyt (Tabelka. 5.).

10-10=0

~~10~~	30	10	40		
10	0	0	0	0	
10				~~15~~	15-10=5
				30	
				10	
				35	

Tabelka.5. Krok.2. Min(10,15) = 10

Uzyskaliśmy zero w podaży więc wstawiamy zera w resztę komórek w danej kolumnie (Tabelka. 6.).

0	30	10	40	
10	0	0	0	0
10				5
0				30
0				10
0				35

Tabelka.6. Podaż = 0. Zerujemy resztę komórek w kolumnie.

Idziemy do kolejnej wolnej komórki, wpisujemy mniejszą wartość z odpowiadających jej popytu i podaży. Pomniejszamy o tą samą wartość odpowiadający komórce podaż i popyt (Tabelka. 7.).

30-5=25

0	~~30~~	10	40		
10	0	0	0	0	
10	5			~~5~~	5-5=0
0				30	
0				10	
0				35	

Tabelka.7. Krok.3. Min(30,5) = 5

Uzyskaliśmy zero w popycie więc wstawiamy zera w resztę komórek w danym wierszu (Tabelka. 8.).

0	25	10	40	
10	0	0	0	0
10	5	0	0	0
0				30
0				10
0				35

Tabelka.8. Popyt = 0. Zerujemy resztę komórek w wierszu.

Idziemy do kolejnej wolnej komórki, wpisujemy mniejszą wartość z odpowiadających jej popytu i podaży. Pomniejszamy o tą samą wartość odpowiadający komórce podaż i popyt (Tabelka. 9.).

25-25=0

0	~~25~~	10	40		
10	0	0	0	0	
10	5	0	0	0	
0	25			~~30~~	30-25=5
0				10	
0				35	

Tabelka.9. Krok.3. Min(25,30) = 25

Uzyskaliśmy zero w podaży więc wstawiamy zera w resztę komórek w danej kolumnie (Tabelka. 10.).

0	0	10	40	
10	0	0	0	0
10	5	0	0	0
0	25			5
0	0			10
0	0			35

Tabelka.10. Podaż = 0. Zerujemy resztę komórek w kolumnie.

Idziemy do kolejnej wolnej komórki, wpisujemy mniejszą wartość z odpowiadających jej popytu i podaży. Pomniejszamy o tą samą wartość odpowiadający komórce podaż i popyt (Tabelka. 11.).

10-5=5

0	0	~~10~~	40	
10	0	0	0	0
10	5	0	0	0
0	25	5		~~5~~
0	0			10
0	0			35

5-5=0

Tabelka.11. Krok.3. Min(10,5) = 5

Uzyskaliśmy zero w popycie więc wstawiamy zera w resztę komórek w danym wierszu (Tabelka. 12.).

0	0	5	40	
10	0	0	0	0
10	5	0	0	0
0	25	5	0	0
0	0			10
0	0			35

Tabelka.12. Popyt = 0. Zerujemy resztę komórek w wierszu.

Idziemy do kolejnej wolnej komórki, wpisujemy mniejszą wartość z odpowiadających jej popytu i podaży. Pomniejszamy o tą samą wartość odpowiadający komórce podaż i popyt (Tabelka. 13.).

5-5=0

0	0	~~5~~	40	
10	0	0	0	0
10	5	0	0	0
0	25	5	0	0
0	0	5		~~10~~
0	0			35

10-5=5

Tabelka.13. Krok.3. Min(5,10) = 5

Uzyskaliśmy zero w podaży więc wstawiamy zera w resztę komórek w danej kolumnie (Tabelka. 14.).

0	0	0	40	
10	0	0	0	0
10	5	0	0	0
0	25	5	0	0
0	0	5		5
0	0	0		35

Tabelka.14. Podaż = 0. Zerujemy resztę komórek w kolumnie.

Idziemy do kolejnej wolnej komórki, wpisujemy mniejszą wartość z odpowiadających jej popytu i podaży. Pomniejszamy o tą samą wartość odpowiadający komórce podaż i popyt (Tabelka. 15.).

40-5=35

0	0	0	~~40~~		
10	0	0	0	0	
10	5	0	0	0	
0	25	5	0	0	
0	0	5	5	~~5~~	5-5=0
0	0	0		35	

Tabelka.15. Krok.3. Min(40,5) = 5

Uzyskaliśmy zero w popycie więc wstawiamy zera w resztę komórek w danym wierszu (Tabelka. 16.).

0	0	0	35	
10	0	0	0	0
10	5	0	0	0
0	25	5	0	0
0	0	5	5	0
0	0	0		35

Tabelka.16. Popyt = 0. Nie ma więcej komórek w wierszu.

Idziemy do kolejnej wolnej komórki, wpisujemy mniejszą wartość z odpowiadających jej popytu i podaży. Pomniejszamy o tą samą wartość podaż i popyt (Tabelka. 17.). Jest to już ostatni element w tabelce. Wartość podaży i popytu dla ostatniego elementu zawsze powinna być taka sama.

35-35=0

0	0	0	~~35~~		
10	0	0	0	0	
10	5	0	0	0	
0	25	5	0	0	
0	0	5	5	0	
0	0	0	35	~~35~~	35-35=0

Tabelka.17. Krok.3. Min(35,35) = 35

Tabelka po tym kroku powinna mieć wszystkie wartości popytu i podaży równe zero. (Tabelka. 18.).

0	0	0	0	
10	0	0	0	0
10	5	0	0	0
0	25	5	0	0
0	0	5	5	0
0	0	0	35	0

Tabelka.18. Ostatni element w tabelce

W ten sposób uzyskaliśmy rozwiązanie dopuszczalne(Tabelka. 19.). Wszystkie zerowe elementy rozwiązania nazywamy elementami nie bazowymi. Natomiast elementami bazowymi nazywamy wszystkie elementy niezerowe. Przy czym el. bazowych powinno być m+n-1 (5+4-1=8), wówczas rozwiązanie nazywamy zdegenerowanym. W innym przypadku rozwiązanie będzie niezdegenerowane a my nie będziemy w stanie sprawdzić jego optymalności metodą potencjałów.

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25	5	0	30
0	0	5	5	10
0	0	0	35	35

elementy niebazowe

elementy bazowe

Tabelka.19. Krok.4. Rozw. dopuszczalne -> zdegenerowane (8 el. bazowych).

Na koniec należałoby policzyć koszt jaki uzyskaliśmy tą metodą. Koszt wyliczamy przemnażając dany element tablicy kosztów z danym elementem naszego rozwiązania poczym wartości te sumujemy (Tabelka. 20.).

5	2	1	5
3	**1**	1	4
1	**1**	**2**	3
2	1	**5**	**1**
2	1	2	**6**

koszty

10	0	0	0
10	**5**	0	0
0	**25**	**5**	0
0	0	**5**	**5**
0	0	0	**35**

rozwiązanie dopuszczalne

koszt rozwiązania

5*10 + 3*10 + 1*5 + 1*25 + 2*5 + 5*5 + 1*5 + 6*35 = 360

Tabelka.20. Koszt rozwiązania dopuszczalnego

Uzyskaliśmy wynik 360. Porównując go z kosztem uzyskanym innymi metodami (najmniejszego elementu lub VAM) zauważymy, że jest to wynik najgorszy. Wynika to z faktu, że rozwiązując problem metodą pn. - zach. kąta nie bierzemy pod uwagę kosztów. Dlatego metoda ta rzadko daje nam rozwiązanie optymalne.

3.3 Metoda najmniejszego elementu

Pełna nazwa to metoda najmniejszego elementu w macierzy kosztów. Metodą tą uzyskamy rozwiązanie dopuszczalne zadania transportowego. Bierze ona pod uwagę macierz kosztów dzięki czemu daje w wyniku niski koszt rozwiązania.

Wyobraźmy sobie następujące zagadnienie transportowe:
Jesteśmy firmą przewozową (np. oranżady). Czterech producentów oranżady (P1, P2, P3, P4) z różnych miast dysponuje odpowiednio 20, 30, 10 i 40 skrzynkami napoju. Natomiast 5 sklepów (S1, S2, S3, S4, S5) z innych miast chętnie kupią odpowiednio 10, 15, 30, 10 i 35 skrzynek. Mamy jak najmniejszym kosztem porozwozić wszystkie skrzynki, znając koszty drogi od danego producenta (dostawcy) do każdego sklepu (odbiorcy). Koszty te zostały zestawione w tabeli poniżej (Tabelka.1.).

dostawcy

odbiorcy

20	30	10	40		
P1	P2	P3	P4		
5	2	1	5	S1	10
3	1	1	4	S2	15
1	1	2	3	S3	30
2	1	5	1	S4	10
2	1	2	6	S5	35

koszty

Tabelka.1. Zestawienie danych z zadania w postaci tabelki

Rozwiązanie problemu metodą najmniejszego elementu macierzy kosztów:

Na początek musimy przygotować sobie dwie tabelki o wymiarze m-wierszy na n-kolumn,
gdzie:
m - liczba odbiorców,
n - liczba dostawców.

Dodajemy wiersz u góry z liczbą towaru do dostarczenia (podaż) i kolumnę na końcu z liczbą towaru do odebrania (popyt).
Przy czym pierwsza tabelka jest czysta (na wyniki) druga natomiast wypełniona kosztami (Tabelka.2.).

podaż

popyt

20	30	10	40	
				10
				15
				30
				10
				35

a)

podaż

popyt

20	30	10	40	
5	2	1	5	10
3	1	1	4	15
1	1	2	3	30
2	1	5	1	10
2	1	2	6	35

b)

koszty

Tabelka.2. Tabelka na wyniki (a) oraz tabelka kosztów (b)

W pierwszym kroku kładziemy przed sobą tabelkę kosztów. Zaczynając od góry szukamy pierwszej komórki o najmniejszym koszcie, odznaczamy ją. Komórce tej odpowiada jedna wartość podaży oraz popytu. Wybieramy spośród nich wartość mniejszą i odejmujemy ją zarówno od danej komórki popytu jak i komórki podaży.

Pierwszym minimalnym kosztem jest 1, o podaży = 10 jak i popycie = 10. Wartości podaży i popytu są równe, więc wartością minimalną będzie 10. Odejmujemy ją od popytu (10-10=0) jak i od podaży (10-10=0) (Tabelka. 3.).

10-10=0

20	30	~~10~~	40		
5	2	1	5	~~10~~	10-10=0
3	1	1	4	15	
1	1	2	3	30	
2	1	5	1	10	
2	1	2	6	35	

Tabelka.3. Krok.1.Min. koszt = 1. Min(10,10) = 10

Teraz sięgamy po czystą tabelkę. Wpisujemy naszą wartość minimalną min(popyt,podaż) w komórkę, która odpowiada komórce z minimalnym kosztem w tabeli kosztów. Następnie sprawdzamy, która wartość (popytu czy podaży) wyzerowała się. Jeżeli wyzerowała się podaż to wstawiamy zera w resztę komórek w tej kolumnie, jeżeli popyt to wstawiamy zera w resztę komórek danego wiersza. W tym przypadku wyzerowała się zarówna podaż jak i popyt - wypełniamy więc zerami zarówno wiersz jak i kolumnę (Tabelka. 4.).

20	30	0	40	
		10		0
				15
				30
				10
				35

20	30	0	40	
0	0	10	0	0
		0		15
		0		30
		0		10
		0		35

Tabelka.4. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w tabeli kosztów - (1,3). Popyt=0 i podaż=0, zerujemy komórki w kolumnie jak i w wierszu.

Krok drugi - bierzemy tabelkę kosztów i zakreślamy na niej komórki, które wypełniliśmy zerami w tabelce wyników. Następnie szukamy w niej następnego minimalnego kosztu (pomijając zakreślone komórki). Jest to **koszt = 1** o wartości **podaży 30 i popycie 15**. Wartością mniejszą jest 15. Odejmujemy ją od podaży (30-15=15) jak i od popytu (15-15=0) (Tabelka. 5.).

20	30	0	40	
5	2	1	5	0
3	1	1	4	15
1	1	2	3	30
2	1	5	1	10
2	1	2	6	35

30-15=15

20	~~30~~	0	40		
5	2	1	5	0	
3	1	1	4	~~15~~	15-15=0
1	1	2	3	30	
2	1	5	1	10	
2	1	2	6	35	

Tabelka.5. Krok.2.Min. koszt = 1. Min(30,15) = 15

Sięgamy po tabelkę wyników. Wpisujemy 15 w miejsce odpowiadające minimalnej wartości kosztów w tabelce kosztów. Wyzerował się popyt, więc wypełniamy resztę komórek w wierszu zerami (Tabelka. 6.).

20	15	0	40	
0	0	10	0	0
	15	0		0
		0		30
		0		10
		0		35

20	15	0	40	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
		0		30
		0		10
		0		35

Tabelka.6. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w tabeli kosztów - (2,2). Popyt=0, zerujemy komórki w wierszu.

Krok kolejny - bierzemy tabelkę kosztów i zakreślamy na niej komórki, które wypełniliśmy zerami w tabelce wyników. Następnie szukamy w niej następnego minimalnego kosztu (pomijając zakreślone komórki). Jest to **koszt = 1** o wartości **podaży 20 i popycie 30**. Wartością mniejszą jest 20. Odejmujemy ją od podaży (20-20=0) jak i od popytu (30-20=10) (Tabelka. 7.).

20	15	0	40	
5	2	1	5	0
3	1	1	4	0
1	1	2	3	30
2	1	5	1	10
2	1	2	6	35

20-20=0

~~20~~	15	0	40		
5	2	1	5	0	
3	1	1	4	0	
1	1	2	3	~~30~~	30-20=10
2	1	5	1	10	
2	1	2	6	35	

Tabelka.7. Krok.3.Min. koszt = 1. Min(20,30) = 20

Sięgamy po tabelkę wyników. Wpisujemy 20 w miejsce odpowiadające minimalnej wartości kosztów w tabelce kosztów. Wyzerowała się podaż, więc wypełniamy resztę komórek w kolumnie zerami (Tabelka. 8.).

0	15	0	40	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20		0		10
		0		10
		0		35

0	15	0	40	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20		0		10
0		0		10
0		0		35

Tabelka.8. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w tabeli kosztów - (3,1). *Podaż=0, zerujemy komórki w kolumnie.*

Krok kolejny - bierzemy tabelkę kosztów i zakreślamy na niej komórki, które wypełniliśmy zerami w tabelce wyników. Następnie szukamy w niej następnego minimalnego kosztu (pomijając zakreślone komórki). Jest to **koszt = 1** o wartości **podaży 15 i popycie 10**. Wartością mniejszą jest 10. Odejmujemy ją od podaży (15-10=5) jak i od popytu (10-10=0) (Tabelka. 9.).

0	15	0	40	
5	2	1	5	0
3	1	1	4	0
1	1	2	3	10
2	1	5	1	10
2	1	2	6	35

15-10=5

0	~~15~~	0	40		
5	2	1	5	0	
3	1	1	4	15	
1	1	2	3	~~10~~	10-10=0
2	1	5	1	10	
2	1	2	6	35	

Tabelka.9. Krok.4.Min. koszt = 1. Min(15,10) = 10

Sięgamy po tabelkę wyników. Wpisujemy 10 w miejsce odpowiadające minimalnej wartości kosztów w tabelce kosztów. Wyzerował się popyt, więc wypełniamy resztę komórek w wierszu zerami (Tabelka. 10.).

0	5	0	40	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20	10	0		0
0		0		10
0		0		35

0	5	0	40	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20	10	0	0	0
0		0		10
0		0		35

Tabelka.10. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w tabeli kosztów - (3,2). *Popyt=0, zerujemy komórki w wierszu.*

Krok kolejny - bierzemy tabelkę kosztów i zakreślamy na niej komórki, które wypełniliśmy zerami w tabelce wyników. Następnie szukamy w niej następnego minimalnego kosztu (pomijając zakreślone komórki). Jest **to koszt = 1** o wartości **podaży 5 i popycie 10**. Wartością mniejszą jest 5. Odejmujemy ją od podaży (5-5=0) jak i od popytu (10-5=5) (Tabelka. 11.).

0	5	0	40	
5	2	1	5	0
3	1	1	4	0
1	1	2	3	0
2	1	5	1	10
2	1	2	6	35

5-5=0

0	~~5~~	0	40		
5	2	1	5	0	
3	1	1	4	0	
1	1	2	3	0	
2	1	5	1	~~10~~	10-5=5
2	1	2	6	35	

Tabelka.11. Krok.5.Min. koszt = 1. Min(5,10) = 5

Sięgamy po tabelkę wyników. Wpisujemy 5 w miejsce odpowiadające minimalnej wartości kosztów w tabelce kosztów. Wyzerowała się podaż, więc wypełniamy resztę komórek w kolumnie zerami (Tabelka. 12.).

0	0	0	40	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20	10	0	0	0
0	5	0		5
0		0		35

0	0	0	40	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20	10	0	0	0
0	5	0		5
0	0	0		35

Tabelka.12. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w tabeli kosztów - (4,2). Podaż=0, zerujemy komórki w kolumnie.

Krok kolejny - bierzemy tabelkę kosztów i zakreślamy na niej komórki, które wypełniliśmy zerami w tabelce wyników. Następnie szukamy w niej następnego minimalnego kosztu (pomijając zakreślone komórki). Jest to **koszt = 1** o wartości **podaży 40 i popycie 5**. Wartością mniejszą jest 5. Odejmujemy ją od podaży (40-5=35) jak i od popytu (5-5=0) (Tabelka. 13.).

0	0	0	40	
5	2	1	5	0
3	1	1	4	0
1	1	2	3	0
2	1	5	1	5
2	1	2	6	35

40-5=35

0	0	0	~~40~~		
5	2	1	5	0	
3	1	1	4	0	
1	1	2	3	0	
2	1	5	1	~~5~~	5-5=0
2	1	2	6	35	

Tabelka.13. Krok.6.Min. koszt = 1. Min(40,5) = 5

Sięgamy po tabelkę wyników. Wpisujemy 5 w miejsce odpowiadające minimalnej wartości kosztów w tabelce kosztów. Wyzerował się popyt jednak nie ma w wierszu już więcej komórek do wyzerowania (Tabelka. 14.).

0	0	0	35	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20	10	0	0	0
0	5	0	5	0
0	0	0		35

0	0	0	35	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20	10	0	0	0
0	5	0	5	0
0	0	0		35

Tabelka.14. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w tabeli kosztów - (4,4). *Popyt=0, nie ma co zerować.*

Krok ostatni - bierzemy tabelkę kosztów i zakreślamy na niej komórki, które wypełniliśmy zerami w tabelce wyników. Została ostatnia nie zakreślona komórka w tabelce kosztów. Jest to **koszt = 6** o wartości **podaży 35 i popycie 35**. Dla ostatniego elementu (w ostatnim kroku) popyt i podaż zawsze muszą być sobie równe. Odejmujemy 35 od podaży (35-35=0) jak i od popytu (35-35=0 (Tabelka. 15.).

0	0	0	35	
5	2	1	5	0
3	1	1	4	0
1	1	2	3	0
2	1	5	1	0
2	1	2	6	35

			35-35=0		
0	0	0	~~35~~		
5	2	1	5	0	
3	1	1	4	0	
1	1	2	3	0	
2	1	5	1	0	
2	1	2	6	~~35~~	35-35=0

Tabelka.15. Krok.7.Min. koszt = 6. Min(35,35) = 35

Sięgamy po tabelkę wyników. Wpisujemy 35 w ostatnią komórkę tabelki. Wyzerowały się zarówno popyt jak i podaż (Tabelka. 16.).

0	0	0	0	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20	10	0	0	0
0	5	0	5	0
0	0	0	35	0

0	0	0	0	
0	0	10	0	0
0	15	0	0	0
20	10	0	0	0
0	5	0	5	0
0	0	0	35	0

Tabelka.16. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w tabeli kosztów - (5,4). *Popyt=0, nie ma co zerować.*

Tabelka po tym kroku powinna mieć wszystkie wartości popytu i podaży równe zero.

W ten sposób uzyskaliśmy rozwiązanie dopuszczalne(Tabelka. 19.). Wszystkie zerowe elementy rozwiązania nazywamy **elementami nie bazowymi**. Natomiast **elementami bazowymi** nazywamy wszystkie elementy niezerowe. Przy czym el. bazowych powinno być m+n-1 (5+4-1=8), wówczas rozwiązanie nazywamy **zdegenerowanym**. W innym przypadku rozwiązanie będzie **niezdegenerowan**e a my nie będziemy w stanie sprawdzić jego optymalności metodą potencjałów.

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	15	0	0	15
20	10	0	0	30
0	5	0	5	10
0	0	0	35	35

elementy niebazowe   elementy bazowe

Tabelka.19. Rozw. dopuszczalne -> niezdegenerowane (7 el. bazowych).

Na koniec należałoby policzyć koszt jaki uzyskaliśmy tą metodą. Koszt wyliczamy przemnażając dany element tablicy kosztów z danym elementem naszego rozwiązania poczym wartości te sumujemy (Tabelka. 20.).

5	2	1	5
3	1	1	4
1	1	2	3
2	1	5	1
2	1	2	6

koszty

0	0	10	0
0	15	0	0
20	10	0	0
0	5	0	5
0	0	0	35

rozwiązanie dopuszczalne

koszt rozwiązania

1*10 + 1*15 + 1*20 + 1*10 + 1*5 + 1*5 + 6*35 = **275**

koszt rozwiązania dopuszczalnego wynosi 275

Tabelka.20. Koszt rozwiązania dopuszczalnego

Uzyskaliśmy wynik 275. Porównując go z kosztem uzyskanym innymi metodami (pn.-zach. kąta lub VAM) zauważymy, że wynik nie jest najgorszy (ani najlepszy). W odróżnieniu od metody pn. - zach. kąta w metodzie najmniejszego elementu bierzemy pod uwagę macierz kosztów.

Metoda VAM

Metodą tą uzyskamy rozwiązanie dopuszczalne zadania transportowego. Bierze ona pod uwagę macierz kosztów dzięki czemu daje w wyniku niski koszt rozwiązania (często lepszy jak metodą najmniejszego elementu).

Wyobraźmy sobie następujące zagadnienie transportowe:
Jesteśmy firmą przewozową (np. oranżady). Czterech producentów oranżady (P1, P2, P3, P4) z różnych miast dysponuje odpowiednio 20, 30, 10 i 40 skrzynkami napoju. Natomiast 5 sklepów (S1, S2, S3, S4, S5) z innych miast chętnie kupią odpowiednio 10, 15, 30, 10 i 35 skrzynek. Mamy jak najmniejszym kosztem porozwozić wszystkie skrzynki, znając koszty drogi od danego producenta (dostawcy) do każdego sklepu (odbiorcy). Koszty te zostały zestawione w tabeli poniżej (Tabelka.1.).

dostawcy

odbiorcy

20	30	10	40		
P1	P2	P3	P4		
5	2	1	5	S1	10
3	1	1	4	S2	15
1	1	2	3	S3	30
2	1	5	1	S4	10
2	1	2	6	S5	35

koszty

Tabelka.1. Zestawienie danych z zadania w postaci tabelki

Rozwiązanie problemu metodą najmniejszego elementu macierzy kosztów:

Na początek musimy przygotować sobie dwie tabelki o wymiarze m-wierszy na n-kolumn,
gdzie:
m - liczba odbiorców,
n - liczba dostawców.

Przy czym pierwsza tabelka jest czysta (na wyniki) druga natomiast wypełniona kosztami
Dodajemy wiersz u góry i kolumnę na końcu. W pierwszej tabelce dodatkowy wiersz wypełniamy liczbą towaru do dostarczenia (podaż), natomiast kolumnę liczbą towaru do odebrania (popyt). W drugiej tabelce dodatkowy wiersz i kolumnę pozostawiamy czystą (Tabelka.2.).

podaż

popyt

20	30	10	40	
				10
				15
				30
				10
				35

a)

5	2	1	5	
3	1	1	4	
1	1	2	3	
2	1	5	1	
2	1	2	6	

b)

koszty

Tabelka.2. Tabelka na wyniki (a) oraz tabelka kosztów (b)

W pierwszym kroku kładziemy przed sobą tabelkę kosztów. Po kolei w każdej kolumnie szukamy dwóch najmniejszych wartości po czym odejmujemy je od siebie (od większej mniejszą). Tak otrzymane dla każdej kolumny wyniki (nazwijmy te liczby wskaźnikami) wpisujemy w pusty wiersz tabelki. To samo robimy dla wierszy a wyniki wpisujemy w ostatnią, pustą kolumnę (Tabelka. 3.).

2-1=1	1-1=0	1-1=0	3-1=2	
5	2	1	5	2-1=1
3	1	1	4	1-1=0
1	1	2	3	1-1=0
2	1	5	1	1-1=0
2	1	2	6	2-1=1

Tabelka.3. Krok.1. Wyliczanie wskaźników

Następnie szukamy najwyższego wskaźnika (Tabelka. 4a.).

Jeżeli najwyższym wskaźnikiem jest wskaźnik odpowiadający kolumnie wówczas szukamy w tej kolumnie najniższej wartości kosztu. Jeżeli natomiast odpowiada wierszowi wtedy w tym wierszu szukamy najniższego kosztu. Tutaj najwyższym wskaźnikiem jest 2 - odpowiada on kolumnie (dlatego została zaznaczona na żółto). Najniższym kosztem w kolumnie jest wartość 1 (Tabelka. 4b.).

1	0	0	2	
5	2	1	5	1
3	1	1	4	0
1	1	2	3	0
2	1	5	1	0
2	1	2	6	1

1	0	0	2	
5	2	1	5	1
3	1	1	4	0
1	1	2	3	0
2	1	5	1	0
2	1	2	6	1

Tabelka.4. Największy wskaźnik - 2. Najniższa wartość kosztu w kolumnie - 1.

Teraz sięgamy po czystą tabelkę. Odnajdujemy w niej komórkę odpowiadającą pozycji wcześniej odnalezionego minimalnego kosztu w tabelce kosztów. Jest to wiersz 4, kolumna 4. Komórce tej odpowiada podaż i popyt odpowiednio o wartościach 40 i 10. Wybieramy wartość mniejszą - czyli 10 i wpisujemy ją w komórkę. Następnie odejmujemy tę wartość od podaży (40-10=30) i popytu (10-10=0) (Tabelka. 5a.).

Sprawdzamy następnie, która wartość (podaż czy popyt) wyzerowała się. Jeżeli wyzerowałaby się podaż należałoby wypełnić resztę komórek w kolumnie zerami. Nam wyzerował sie popyt czyli należy resztę komórek w wierszu wypełnić zerami (Tabelka. 5b.).

40-10=30

20	30	10	~~40~~		
				10	
				15	
				30	
			10	~~10~~	10-10=0
				35	

20	30	10	30	
				10
				15
				30
0	0	0	10	0
				35

Tabelka.5. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w kolumnie tabeli kosztów - (4,4). Popyt=0, zerujemy komórki w wierszu

Krok drugi - bierzemy tabelkę kosztów i wykreślamy w niej wiersz lub kolumnę, którą wypełniliśmy powyżej w tabelce wyników. Po czym na nowo wyliczamy wskaźniki pomijając wykreślone komórki (Tabelka. 6.).

2-1=1	1-1=0	1-1=0	4-3=1	
5	2	1	5	2-1=1
3	1	1	4	1-1=0
1	1	2	3	1-1=0
2	1	2	6	2-1=1

Tabelka.6. Krok.2. Wyliczanie wskaźników.

Następnie szukamy najwyższego wskaźnika. W przypadku (jak poniżej) gdy kilka maksymalnych wskaźników jest takich samych wybieramy ten, który ma najmniejszą wartość kosztu (w kolumnie - dla wskaźnika odpowiadającego kolumnie, bądź w wierszu - dla wskaźnika odpowiadającego wierszowi). (Tabelka. 7a.).

Jeżeli najwyższym wskaźnikiem jest wskaźnik odpowiadający kolumnie wówczas szukamy w tej kolumnie najniższej wartości kosztu. Jeżeli natomiast odpowiada wierszowi wtedy w tym wierszu szukamy najniższego kosztu. Najwyższym wskaźnikiem, który zarazem ma najniższą wartość kosztu w kolumnie jest 1 o koszcie również = 1 (Tabelka. 7b.).

1	0	0	1	
5	2	1	5	1
3	1	1	4	0
1	1	2	3	0
2	1	2	6	1

1	0	0	1	
5	2	1	5	1
3	1	1	4	0
1	1	2	3	0
2	1	2	6	1

Tabelka.7. Największy wskaźnik - 1. Najniższa wartość kosztu w kolumnie - 1.

Teraz sięgamy po czystą tabelkę. Odnajdujemy w niej komórkę odpowiadającą pozycji wcześniej odnalezionego minimalnego kosztu w tabelce kosztów. Jest to wiersz 3, kolumna 1. Komórce tej odpowiada podaż i popyt odpowiednio o wartościach 20 i 30. Wybieramy wartość mniejszą - czyli 20 i wpisujemy ją w komórkę. Następnie odejmujemy tę wartość od podaży (20-20=0) i popytu (30-20=10) (Tabelka. 8a.).

Sprawdzamy następnie, która wartość (podaż czy popyt) wyzerowała się. Wyzerowała sie podaż więc należy resztę komórek w kolumnie wypełnić zerami (Tabelka. 8b.).

20-20=0

~~20~~	30	10	30		
				10	
				15	
20				~~30~~	30-20=10
0	0	0	10	0	
				35	

0	30	10	30	
0				10
0				15
20				10
0	0	0	10	0
0				35

Tabelka.8. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w kolumnie tabeli kosztów - (3,1). Podaż=0, zerujemy komórki w kolumnie.

Krok kolejny - bierzemy tabelkę kosztów i wykreślamy w niej wiersz lub kolumnę, którą wypełniliśmy powyżej w tabelce wyników. Po czym na nowo wyliczamy wskaźniki pomijając wykreślone komórki (Tabelka. 9.).

	1-1=0	1-1=0	4-3=1	
	2	1	5	2-1=1
	1	1	4	1-1=0
	1	2	3	2-1=1
	1	2	6	2-1=1

Tabelka.9. Krok.3. Wyliczanie nowych wskaźników.

Następnie szukamy najwyższego wskaźnika. W przypadku (jak poniżej)gdy kilka maksymalnych wskaźników jest takich samych wybieramy ten, który ma najmniejszą wartość kosztu (w kolumnie - dla wskaźnika odpowiadającego kolumnie, bądź w wierszu - dla wskaźnika odpowiadającego wierszowi) (Tabelka. 10a.).

Jeżeli najwyższym wskaźnikiem jest wskaźnik odpowiadający kolumnie wówczas szukamy w tej kolumnie najniższej wartości kosztu. Jeżeli natomiast odpowiada wierszowi wtedy w tym wierszu szukamy najniższego kosztu. Najwyższym wskaźnikiem, który zarazem ma najniższą wartość kosztu w wierszu jest 1 o koszcie również = 1 (Tabelka. 10b.).

	0	0	1	
	2	1	5	1
	1	1	4	0
	1	2	3	1
	1	2	6	1

	0	0	1	
	2	1	5	1
	1	1	4	0
	1	2	3	1
	1	2	6	1

Tabelka.10. Największy wskaźnik - 1. Najniższa wartość kosztu w wierszu - 1.

Teraz sięgamy po tabelkę wyników. Odnajdujemy w niej komórkę odpowiadającą pozycji wcześniej odnalezionego minimalnego kosztu w tabelce kosztów. Jest to wiersz 1, kolumna 3. Komórce tej odpowiada podaż i popyt odpowiednio o wartościach 10 i 10. Wartości są jednakowe, wpisujemy więc w komórkę 10. Następnie odejmujemy tę wartość od podaży (10-10=0) i popytu (10-10=0) (Tabelka. 11a.).

Sprawdzamy następnie, która wartość (podaż czy popyt) wyzerowała się. Wyzerowały sie zarówno podaż jak i popyt więc należy resztę komórek w kolumnie i w wierszu wypełnić zerami (Tabelka. 11b.).

		10-10=0			
0	30	~~10~~	30		
0		10		~~10~~	10-10=0
0				15	
20				10	
0	0	0	10	0	
0				35	

0	30	0	30	
0	0	10	0	0
0		0		15
20		0		10
0	0	0	10	0
0		0		35

Tabelka.11. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w kolumnie tabeli kosztów - (1,3). Podaż=0 i popyt=0, zerujemy komórki w kolumnie i w wierszu.

Krok kolejny - bierzemy tabelkę kosztów i wykreślamy w niej wiersz lub kolumnę, którą wypełniliśmy powyżej w tabelce wyników. W tym wypadku zakreślamy zarówno wiersz i kolumnę. Po czym na nowo wyliczamy wskaźniki pomijając wykreślone komórki (Tabelka. 12.).

	1-1=0		4-3=1	
	1		4	4-1=3
	1		3	3-1=2
	1		6	6-1=5

Tabelka.12. Krok.4. Wyliczanie nowych wskaźników.

Następnie szukamy najwyższego wskaźnika. Jest nim wskaźnik o wartości 5 - odpowiadający wierszowi tabelki (Tabelka. 13a.).

Wskaźnik odpowiada wierszowi, więc w tym wierszu szukamy najniższego kosztu. Najniższym kosztem w wierszu jest koszt = 1 (Tabelka. 13b.).

	0		1	
	1		4	3
	1		3	2
	1		6	5

	0		1	
	1		4	3
	1		3	2
	1		6	5

Tabelka.13. Największy wskaźnik - 5. Najniższa wartość kosztu w wierszu - 1.

Teraz sięgamy po tabelkę wyników. Odnajdujemy w niej komórkę odpowiadającą pozycji wcześniej odnalezionego minimalnego kosztu w tabelce kosztów. Jest to wiersz 5, kolumna 2. Komórce tej odpowiada podaż i popyt odpowiednio o wartościach 30 i 35. Wybieramy wartość mniejszą - czyli 30 i wpisujemy ją w komórkę. Następnie odejmujemy tę wartość od podaży (30-30=0) i popytu (35-30=5) (Tabelka. 14a.).

Sprawdzamy następnie, która wartość (podaż czy popyt) wyzerowała się. Wyzerowała sie podaż jak więc należy resztę komórek w kolumnie wypełnić zerami (Tabelka. 14b.).

	30-30=0				
0	~~30~~	0	30		
0	0	10	0	0	
0		0		15	
20		0		10	
0	0	0	10	0	
0	30	0		~~35~~	35-30=5

0	0	0	30	
0	0	10	0	0
0	0	0		15
20	0	0		10
0	0	0	10	0
0	30	0		5

Tabelka.14. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w kolumnie tabeli kosztów - (5,2). Podaż=0, zerujemy komórki w kolumnie.

Krok piąty - bierzemy tabelkę kosztów i wykreślamy w niej kolumnę, którą wypełniliśmy powyżej w tabelce wyników. Po czym na nowo wyliczamy wskaźniki pomijając wykreślone komórki. Nie mamy możliwości wyliczenia wskaźników dla wierszy ponieważ w nich pozostało tylko po jednej komórce. Wyliczamy więc wskaźnik tylko dla kolumny (Tabelka. 15.).

			4-3=1	
			4	
			3	
			6	

Tabelka.15. Krok.5. Wyliczanie nowych wskaźników.

Mamy tylko jeden wskaźnik o wartości = 1. Wybieramy go (Tabelka. 16a.).

Wskaźnik odpowiada kolumnie więc w niej szukamy minimalnej wartości kosztu - jest nim koszt = 3 (Tabelka. 16b.).

			1	
			4	
			3	
			6	

			1	
			4	
			3	
			6	

Tabelka.16. Największy wskaźnik - 1. Najniższa wartość kosztu w wierszu - 3.

Teraz sięgamy po tabelkę wyników. Odnajdujemy w niej komórkę odpowiadającą pozycji wcześniej odnalezionego minimalnego kosztu w tabelce kosztów. Jest to wiersz 3, kolumna 4. Komórce tej odpowiada podaż i popyt odpowiednio o wartościach 30 i 10. Wybieramy wartość mniejszą - czyli 10 i wpisujemy ją w komórkę. Następnie odejmujemy tę wartość od podaży (30-10=20) i popytu (10-10=0) (Tabelka. 17a.).

Sprawdzamy następnie, która wartość (podaż czy popyt) wyzerowała się. Wyzerował sie popyt więc należałoby resztę komórek w wierszu wypełnić zerami jednak nie ma już więcej wolnych komórek w tym wierszu (Tabelka. 17b.).

			30-10=20		
0	0	0	~~30~~		
0	0	10	0	0	
0	0	0		15	
20	0	0	10	~~10~~	10-10=0
0	0	0	10	0	
0	30	0		5	

0	0	0	20	
0	0	10	0	0
0	0	0		15
20	0	0	10	0
0	0	0	10	0
0	30	0		5

Tabelka.17. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w kolumnie tabeli kosztów - (3,4). Popyt=0, nie ma już co zerować w wierszu.

Krok szósty - bierzemy tabelkę kosztów i wykreślamy w niej wiersz, którą wypełniliśmy powyżej w tabelce wyników (właściwie to tylko jedna komórka). Po czym na nowo wyliczamy wskaźniki pomijając wykreślone komórki. Nie mamy możliwości wyliczenia wskaźników dla wierszy ponieważ w nich pozostało tylko po jednej komórce. Wyliczamy więc wskaźnik tylko dla kolumny (Tabelka. 18.).

			6-4=2	
			4	
			6	

Tabelka.18. Krok.6. Wyliczanie nowych wskaźników.

Mamy tylko jeden wskaźnik o wartości = 2. Wybieramy go (Tabelka. 19a.).

Wskaźnik odpowiada kolumnie więc w niej szukamy minimalnej wartości kosztu - jest nim koszt = 4 (Tabelka. 19b.).

			2	
			4	
			6	

			2	
			4	
			6	

Tabelka.19. Największy wskaźnik - 2. Najniższa wartość kosztu w wierszu - 4.

Teraz sięgamy po tabelkę wyników. Odnajdujemy w niej komórkę odpowiadającą pozycji wcześniej odnalezionego minimalnego kosztu w tabelce kosztów. Jest to wiersz 2, kolumna 4. Komórce tej odpowiada podaż i popyt odpowiednio o wartościach 20 i 15. Wybieramy wartość mniejszą - czyli 15 i wpisujemy ją w komórkę. Następnie odejmujemy tę wartość od podaży (20-15=5) i popytu (15-15=0) (Tabelka. 20a.).

Sprawdzamy następnie, która wartość (podaż czy popyt) wyzerowała się. Wyzerował sie popyt więc należałoby resztę komórek w wierszu wypełnić zerami jednak nie ma już więcej wolnych komórek w tym wierszu (Tabelka. 20b.).

			20-15=5		
0	0	0	~~20~~		
0	0	10	0	0	
0	0	0	15	~~15~~	15-15=0
20	0	0	10	0	
0	0	0	10	0	
0	30	0		5	

0	0	0	5	
0	0	10	0	0
0	0	0	15	0
20	0	0	10	0
0	0	0	10	0
0	30	0		5

Tabelka.20. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w kolumnie tabeli kosztów - (2,4). Popyt=0, nie ma już co zerować w wierszu.

Krok ostatni - bierzemy tabelkę kosztów i wykreślamy w niej wiersz, którą wypełniliśmy powyżej w tabelce wyników (właściwie to tylko jedna komórka). Nie mamy możliwości wyliczenia wskaźników ponieważ pozostał tylko jeden element. W ostatnim kroku nie wyliczamy więc wskaźników. Pozostawiony (ostatni) element tablicy kosztów bierzemy jako ostatni minimalny koszt = 6 (Tabelka. 21.).

			6	

Tabelka.21. Krok.7. Ostatni krok - brak wskaźników.

Teraz sięgamy po tabelkę wyników. Odnajdujemy w niej komórkę odpowiadającą pozycji ostatniego minimalnego kosztu w tabelce kosztów. Jest to wiersz 5, kolumna 4. Komórce tej odpowiada podaż i popyt odpowiednio o tych samych wartościach 5 i 5. Wpisujemy 5 w komórkę. Następnie odejmujemy tę wartość od podaży (5-5=5) i popytu (5-5=0) (Tabelka. 22a.).

Tabelka po tym kroku powinna mieć wszystkie wartości popytu i podaży równe zero. (Tabelka. 22b.).

			5-5=0		
0	0	0	~~5~~		
0	0	10	0	0	
0	0	0	15	0	
20	0	0	10	0	
0	0	0	10	0	
0	30	0	5	~~5~~	5-5=0

0	0	0	0	
0	0	10	0	0
0	0	0	15	0
20	0	0	10	0
0	0	0	10	0
0	30	0	5	0

Tabelka.22. Miejsce odpowiadające minimalnemu kosztowi w kolumnie tabeli kosztów - (5,4). Popyt=0 i podaż=0, koniec.

W ten sposób uzyskaliśmy rozwiązanie dopuszczalne *(Tabelka. 23.)*. Wszystkie zerowe elementy rozwiązania nazywamy **elementami nie bazowymi**. Natomiast **elementami bazowymi** nazywamy wszystkie elementy niezerowe. Przy czym el. bazowych powinno być m+n-1 (5+4-1=8), wówczas rozwiązanie nazywamy **zdegenerowanym**. W innym przypadku rozwiązanie będzie **niezdegenerowane** a my nie będziemy w stanie sprawdzić jego optymalności metodą potencjałów. Nasze rozwiązanie jest niezdegenerowane - ma tylko 6 el. bazowych (powinno być 8).

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	0	0	15	15
20	0	0	10	30
0	0	0	10	10
0	30	0	5	35

elementy niebazowe   elementy bazowe

Tabelka.23. Rozw. dopuszczalne -> niezdegenerowane (6 el. bazowych).

Na koniec należałoby policzyć koszt jaki uzyskaliśmy tą metodą. Koszt wyliczamy przemnażając dany element tablicy kosztów z danym elementem naszego rozwiązania poczym wartości te sumujemy (Tabelka. 24.).

5	2	1	5
3	1	1	4
1	1	2	3
2	1	5	1
2	1	2	6

koszty

0	0	10	0
0	0	0	15
20	0	0	10
0	0	0	10
0	30	0	5

rozwiązanie dopuszczalne

koszt rozwiązania

1*10 + 4*15 + 1*20 + 3*10 + 1*10 + 1*30 + 6*5 = **190**

koszt rozwiązania dopuszczalnego wynosi 190

Tabelka.24. Koszt rozwiązania dopuszczalnego

Uzyskaliśmy wynik 190. Porównując go z kosztem uzyskanym innymi metodami (pn.-zach. kąta lub najmniejszego el.) zauważymy, że wynik jest najlepszy. W odróżnieniu od metody pn. - zach. kąta w metodzie VAM bierzemy pod uwagę macierz kosztów.

3.4 Metoda e-perturbacji

Metodę tą zastosujemy w momencie kiedy otrzymamy rozwiązanie dopuszczalne niezdegenerowane (dowolną z metod opisanych wcześniej). Nie wpływa ona na koszt rozwiązania dopuszczalnego - powoduje jedynie zwiększenie liczby elementów bazowych

Przyjrzyjmy się rozwiązaniom dopuszczalnym otrzymanym metodami przedstawionymi wcześniej, tj: metodą pn.-zach. kąta (Tabelka.1a.), najmniejszego elementu w macierzy kosztów (Tabelka.1b.) oraz VAM (Tabelka.1c.). Rozwiązanie otrzymane metodą pierwszą ma 8 elementów bazowych, metodą drugą i trzecią - 7, czyli matoda druga i trzecia dała nam **rozwiązanie niezdegenerowane.**

baz: 8 -> rozw. zdegenerowane

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25	5	0	30
0	0	5	5	10
0	0	0	35	35

elementy niebazowe   elementy bazowe   a)

baz: 7 -> rozw. niezdegenerowane

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	15	0	0	15
20	10	0	0	30
0	5	0	5	10
0	0	0	35	35

elementy niebazowe   elementy bazowe   b)

baz: 7 -> rozw. niezdegenerowane

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	0	0	15	15
20	0	0	10	30
0	0	0	10	10
0	30	0	5	35

elementy niebazowe   elementy bazowe   c)

Tabelka.1. Rozwiązanie dopuszczalne otrzymane metodą: a)pn.-zach. kąta; b) najmniejszego elementu; c) VAM

Warunkiem rozwiązania zdegenerowanego jest liczba elementów bazowych (baz) równa m+n-1, gdzie:
m - liczba odbiorców,
n - liczba dostawców.

Dla przedstawionego powyżej problemu transportowego baz tych powinno być 5+4-1 = 8. Taką liczbę baz otrzymaliśmy w metodzie pn.-zach. Kąta.

Dla rozwiązania niezdegenerowanego nie jesteśmy w stanie zastosować metody potencjałów w celu sprawdzenia optymalności rozwiązania (metoda potencjałów zostanie wyjaśniona na następnej stronie.

W celu pozbycia się niezdegenerowania rozwiązania stosujemy **metodę e-perturbacji**.
Wygląda ona następująco (Tabelka.2.):

1. Do każdego odbiorcy dodajemy pomijalnie małą liczbę (nazwijmy ją **eta**)
2. Do ostatniego dostawcy dodajemy pomijalnie małą liczbę pomnożoną przez liczbę odbiorców (**m*eta**)
3. Rozwiązujemy zadanie transportowe od nowa wybraną metodą.

dostawcy   odbiorcy

20	30	10	40 + 5*eta		
P1	P2	P3	P4		
5	2	1	5	S1	10 + eta
3	1	1	4	S2	15 + eta
1	1	2	3	S3	30 + eta
2	1	5	1	S4	10 + eta
2	1	2	6	S5	35 +eta

koszty   eta - pomijalnie mała liczba

Tabelka.2. Metody e-perturbacji.

10-10=0

krok 1.

20	30	~~10~~	40 + 5*eta		
		10		~~10 + eta~~	10+eta-10=eta
		0		15 + eta	
		0		30 + eta	
		0		10 + eta	
		0		35 + eta	

koszt min. =1, min(10,10+eta)=10

30-(15+eta)=15-eta

krok 2.

20	~~30~~	0	40 + 5*eta		
		10		eta	
0	15+eta	0	0	~~15 + eta~~	15+eta-(15+eta)=0
		0		30 + eta	
		0		10 + eta	
		0		35 + eta	

koszt min. =1, min(30,15+eta)=15+eta

20-20=0

krok 3.

~~20~~	15 - eta	0	40 + 5*eta		
0		10		eta	
0	15+eta	0	0	0	
20		0		~~30 + eta~~	30+eta-20=10+eta
0		0		10 + eta	
0		0		35 + eta	

koszt min. =1, min(20,30+eta)=20

15-eta-(10+eta)=5-2eta

krok 4.

0	~~15 - eta~~	0	40 + 5*eta		
0		10		eta	
0	15+eta	0	0	0	
20	10+eta	0	0	~~10 + eta~~	10+eta-(10+eta)=0
0		0		10 + eta	
0		0		35 + eta	

koszt min. =1, min(15-eta,10+eta)=10+eta

5-2eta-(5-2eta)=0

krok 5.

0	~~5 - 2*eta~~	0	40 + 5*eta		
0	0	10		eta	
0	15+eta	0	0	0	
20	10+eta	0	0	0	
0	5-2*eta	0		~~10 + eta~~	10+eta-(5-2eta)=5+3eta
0	0	0		35 + eta	

koszt min. =1, min(5-2eta,10+eta)=5-2eta

40+5eta-(5+3eta)=35+2eta

krok 5.

0	0	0	~~40 + 5*eta~~		
0	0	10		eta	
0	15+eta	0	0	0	
20	10+eta	0	0	0	
0	5-2*eta	0	5+3*eta	~~5 + 3*eta~~	5+3eta-(5+3eta)=0
0	0	0		35 + eta	

koszt min. =1, min(40+5eta,5+3eta)=5+3eta

35+2eta-eta=35+eta

krok 6.

0	0	0	~~35 + 2*eta~~		
0	0	10	eta	~~eta~~	eta-eta=0
0	15+eta	0	0	0	
20	10+eta	0	0	0	
0	5-2*eta	0	5+3*eta	0	
0	0	0		35 + eta	

koszt min. =5, min(35+2eta,eta)=eta

35+eta-35+eta=0

krok 7.

0	0	0	~~35 + eta~~		
0	0	10	eta	0	
0	15+eta	0	0	0	
20	10+eta	0	0	0	
0	5-2*eta	0	5+3*eta	0	
0	0	0	35+eta	~~35 + eta~~	35+eta-35+eta=0

koszt min. =5, min(35+2eta,eta)=eta

WYNIK

0	0	0	0	
0	0	10	eta	0
0	15+eta	0	0	0
20	10+eta	0	0	0
0	5-2*eta	0	5+3*eta	0
0	0	0	35+eta	0

Tabelka.3. Rozwiązanie metodą najmniejszego elementu stosując e-perturbację.

Powyżej został przedstawiony przykład zastosowania e-perturbacji w przypadku obliczeń metodą najmniejszego elementu macierzy kosztów.
Po dodaniu liczby eta do wszystkich odbiorców i liczby m*eta do ostatniego dostawcy postępujemy identycznie jak zostało to opisane w metodzie najmniejszego elementu.

W rezultacie otrzymaliśmy rozwiązanie dopuszczalne, zdegenerowane o liczbie baz = 8.Należy pamiętać, że liczba eta jest wartością pomijalnie małą. Może być - w zależności od danych użytych w zadaniu - liczbą na ósmym, dziesiątym czy setnym miejscu po przecinku (np. eta = 10E-10).
Eta nie jest więc brana pod uwagę podczas wyliczania kosztu. Nasze rozwiązanie nadal ma ten sam koszt = 275.

3.5 Metoda potencjałów

Metoda ta służy do sprawdzenia optymalności rozwiązania dopuszczalnego, zdegenerowanego otrzymanego w wyniku jednej z metod wcześniej opisanych lub przy pomocy cykli (opisanych nieco później).

Po obliczeniu zadania przy pomocy jednej z opisanych wcześniej metod (pn.-zach. kąta, najmniejszego elementu lub VAM) oraz ewentualnym pozbyciu się niezdegenerowania uzyskanego rozwiązania metodą e-perturbacji możemy przystąpić do sprawdzenia czy nasze rozwiązanie dopuszczalne jest optymalnym (czy koszt jest wystarczająco niski). Posłużymy się w tym celu metodą potencjałów.

Sprawdźmy czy uzyskane przez nas wcześniej metodą pn.-zach. kąta rozwiązanie dopuszczalne jest optymalne.

Przypomnijmy sobie jak wyglądało to zadanie (Tabelka.1.a) i jego rozwiązanie dopuszczalne uzyskane metodą pn.-zach. kąta (Tabelka.1.b)

dostawcy

odbiorcy

20	30	10	40		
P1	P2	P3	P4		
5	2	1	5	S1	10
3	1	1	4	S2	15
1	1	2	3	S3	30
2	1	5	1	S4	10
2	1	2	6	S5	35

koszty

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25	5	0	30
0	0	5	5	10
0	0	0	35	35

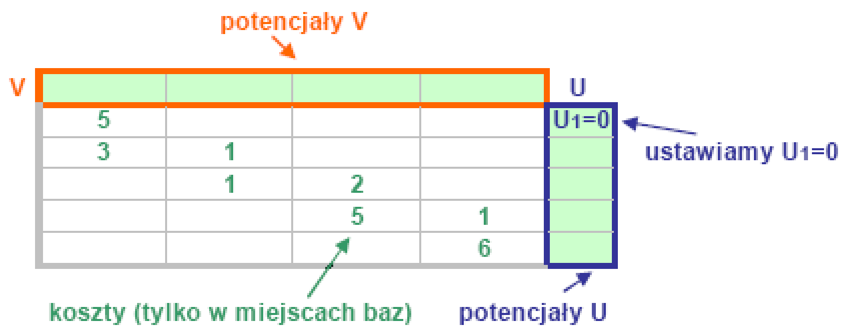
elementy niebazowe

elementy bazowe

Tabelka.1. Zadanie transportowe (a)i jego rozwiązanie dopuszczalne uzyskane metodą pn.-zach. kąta (b)

Na początek musimy przygotować sobie tabelkę na wyniki (Tabelka.2). Ma ona wymiar równy tabelce kosztów. Dodatkowo dostawiamy pusty wiersz u góry i pustą kolumnę na końcu, do których wpisywać będziemy obliczone potencjały (w wiersz - potencjały V, w kolumnę potencjały U).

Wpisujemy w pierwszą komórkę pustej kolumny (w potencjały U) wartość U1=0. Następnie przepisujemy do tabelki koszty (z tabelki 1.a) ale tylko w miejscach odpowiadających pozycjom elementów bazowych w rozwiązaniu dopuszczalnym.



Tabelka.2. Tabelka na wyniki

Teraz możemy przystąpić do obliczeń.

Krok.1. Mamy na wejście ustawioną wartość potencjału U1 = 0, więc szukamy w wierszu odpowiadającym temu U1 (czyli w pierwszym wierszu) kosztu - jest nim koszt = 5 w pierwszej komórce. Następnie w potencjał V odpowiadający znalezionemu kosztowi (czyli V1) wpisujemy wartość równą różnicy kosztu i potencjału U1 (V1=5-0=5). (Tabelka.3.a)

Krok.2.Ustawiliśmy wartość potencjału V1 = 5, więc szukamy w kolumnie odpowiadającej V1 (czyli w pierwszej kolumnie) kolejnego kosztu - jest nim koszt = 3 (wiersz 2, kolumna 1). Następnie w potencjał U odpowiadający znalezionemu kosztowi (czyli U2) wpisujemy wartość równą różnicy kosztu i potencjału V1 (U2=3-5=-2) (Tabelka.3.b).

Poczym powtarzamy krok 1 i 2 aż do wyliczenia wszystkich potencjałów. Czyli kolejny krok:

Ustawiliśmy U2 = -2 - szukamy w wierszu drugim kolejnego kosztu (takiego który nie ma jeszcze ustawionego potencjału V) - jest nim koszt = 1 (wiersz 2, kolumna 2). Następnie w potencjał V2 wpisujemy wartość równą różnicy kosztu i potencjału U2 (V2=1-(-2)=3) (Tabelka.3.c).

Ustawiliśmy V2 = 3 - szukamy w kolumnie drugiej kolejnego kosztu (takiego który nie ma jeszcze ustawionego potencjału U) - jest nim koszt = 1 (wiersz 3, kolumna 2). Następnie w potencjał U3 wpisujemy wartość równą różnicy kosztu i potencjału V2 (U3=1-3=-2) (Tabelka.3.d).

itd

a) $V_1=5-0$

V	$V_1=5$				U
	5				$U_1=0$
	3	1			
		1	2		
			5	1	
				6	

b)

V	$V_1=5$				U	
	5				$U_1=0$	
	3	1			$U_2=-2$	$U_2=3-5$
		1	2			
			5	1		
				6		

c) $V_2=1-(-2)$

V	$V_1=5$	$V_2=3$			U
	5				$U_1=0$
	3	1			$U_2=-2$
		1	2		
			5	1	
				6	

d)

V	$V_1=5$	$V_2=3$			U	
	5				$U_1=0$	
	3	1			$U_2=-2$	
		1	2		$U_3=-2$	$U_3=1-3$
			5	1		
				6		

e) $V_3=2-(-2)$

V	$V_1=5$	$V_2=3$	$V_3=4$		U
	5				$U_1=0$
	3	1			$U_2=-2$
		1	2		$U_3=-2$
			5	1	
				6	

f)

V	$V_1=5$	$V_2=3$	$V_3=4$		U	
	5				$U_1=0$	
	3	1			$U_2=-2$	
		1	2		$U_3=-2$	
			5	1	$U_4=1$	$U_4=5-4$
				6		

g) $V_4=1-1$

V	$V_1=5$	$V_2=3$	$V_3=4$	$V_4=0$	U
	5				$U_1=0$
	3	1			$U_2=-2$
		1	2		$U_3=-2$
			5	1	$U_4=1$
				6	

h)

V	$V_1=5$	$V_2=3$	$V_3=4$	$V_4=0$	U	
	5				$U_1=0$	
	3	1			$U_2=-2$	
		1	2		$U_3=-2$	
			5	1	$U_4=1$	
				6	$U_5=6$	$U_5=6-0$

Tabelka.3. Wyliczanie potencjałów U i V

Poniższa tabelka przedstawia już wyliczone potencjały U i V (Tabelka.4.)

V	5	3	4	0	U
	5				0
	3	1			-2
		1	2		-2
			5	1	1
				6	6

Tabelka.4. Wyliczone potencjały U i V

Kolejnym krokiem jest wyliczenie kosztów pośrednich (Tabelka.5.).

Należy pozostałe (puste) komórki tabelki z wynikami wypełnić sumami potencjału Vi i Uj, gdzie:

i=1,2,..,n

j=1,2,..,m

n - liczba dostawców

m - liczba odbiorców

V	5	3	4	0	U
	5	3+0=3	4+0=4	0+0=0	0
	3	1	4+(-2)=2	0+(-2)=-2	-2
	5+(-2)=3	1	2	0+(-2)=-2	-2
	5+1=6	3+1=4	5	1	1
	5+6=11	3+6=9	4+6=10	6	6

Tabelka.5. Wyliczanie kosztów pośrednich

Następnie wyliczamy wskaźniki optymalności (Tabelka.7.).

W tym celu zestawmy obok siebie dwie tabelki: tabelkę obliczonych przed chwilą kosztów pośrednich i tabelkę kosztów z początku zadania (Tabelka.6.)

V	5	3	4	0	U
	5	3	4	0	0
	3	1	2	-2	-2
	3	1	2	-2	-2
	6	4	5	1	1
	11	9	10	6	6

a) koszty pośrednie

20	30	10	40	
5	2	1	5	10
3	1	1	4	15
1	1	2	3	30
2	1	5	1	10
2	1	2	6	35

b) koszty

Tabelka.6. Tabelka kosztów pośrednich (a) i tabelka kosztów (b)

Wskaźniki optymalności wyliczamy odejmując od kosztów pośrednich (Tabelka.6.a) koszty (Tabelka.6.b)

V	5	3	4	0	U
	5-5=0	3-2=1	4-1=3	0-5=-5	0
	3-3=0	1-1=0	2-1=1	-2-4=-6	-2
	3-1=2	1-1=0	2-2=0	-2-3=-5	-2
	6-2=4	4-1=3	5-5=0	1-1=0	1
	11-2=0	9-1=8	10-2=8	6-6=0	6

V	5	3	4	0	U
	0	1	3	-5	0
	0	0	1	-6	-2
	2	0	0	-5	-2
	4	3	0	0	1
	9	8	8	0	6

wskaźniki optymalności

Tabelka.7. Wskaźniki optymalności

Przyjrzyjmy się teraz wyliczonym wskaźnikom.
Jeżeli wśród nich znajdują się liczby dodatnie wówczas rozwiązanie nie jest rozwiązaniem optymalnym.
Rozwiązanie jest więc optymalne kiedy wszystkie liczby są niedodatnie (ujemne lub zera).

Wśród naszych wskaźników są wartości dodatnie - więc nasze rozwiązanie nie jest optymalne. W takim wypadku należy przekształcić rozwiązanie - zbudować cykl (o czym mowa na następnej stronie) - następnie ponownie sprawdzić optymalność rozwiązania metodą potencjałów - znowu zbudować cykl - sprawdzić optymalność - i tak postępować aż do momentu uzyskania niedodatnich wskaźników optymalności.

3.5.1 Budowa cyklu

Budowanie cyklu służy uzyskaniu rozwiązania dopuszczalnego o niższym koszcie a w rezultacie rozwiązania optymalnego.

Cykl jest niczym innym jak przeniesieniem części towaru lub całości z droższej trasy na tańszą. Przy czym zachowana jest równowaga, tzn: każdy odbiorca dostaje dokładnie tyle towaru ile zamówił.

Czyli jeżeli odbiorcy (np. sklepowi 1) zabierzemy skrzynkę oranżady, która miała być dostarczona do niego od dostawcy (np producenta 1) bo trasa była za droga, to należy mu zapewnić tę skrzynkę od innego dostawcy od którego koszt drogi jest tańszy.

Cykl składa się zawsze z półcyklu dodatniego i półcyklu ujemnego.

Zobaczmy jak to działa na przykładzie.

Aby stworzyć cykl trzeba mieć rozwiązanie dopuszczalne, które będziemy "polepszać" sprawdzone uprzednio metodą potencjałów. Niezbędna jest nam tabelka wskaźników optymalności z metody potencjałów. Przypomnijmy ją sobie (Tabelka.1.)

V	5	3	4	0	U
	0	1	3	-5	0
	0	0	1	-6	-2
	2	0	0	-5	-2
	4	3	0	0	1
	9	8	8	0	6

wskaźniki optymalności

Tabelka.1. Wskaźniki optymalności z metody potencjałów

Wśród wskaźników szukamy największej wartości na plusie (Tabelka.2.) (jeżeli nie ma dodatnich wskaźników oznacza to, że rozwiązanie już jest optymalne - nie ma sensu wówczas tworzyć cyklu)

V	5	3	4	0	U
	0	1	3	-5	0
	0	0	1	-6	-2
	2	0	0	-5	-2
	4	3	0	0	1
	9	8	8	0	6

Tabelka.2. Wsk. optymalności. Wartość maksymalna na minusie = -6

Teraz potrzebna będzie nam tabelka z rozwiązaniem dopuszczalnym (pracujemy na rozw. uzyskanym metodą pn. - zach. kąta), na którą nanosić będziemy cykl.

Zaznaczamy w tabelce znaczkiem "+" pierwszy element cyklu dodatniego, który zawsze znajduje się w miejscu odpowiadającym największemu dodatniemu wskaźnikowi w tabelce wskaźników (Tabelka.3.). Oznacza to, że w to miejsce opłaca się przenieść towar z innych elementów bazowych.

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25	5	0	30
0	0	5	5	10
0 +	0	0	35	35

Tabelka.3. Rozw. dopuszczalne. Naniesiony I element półcyklu dodatniego

Stajemy na komórce z zaznaczonym plusem i od tego miejsca tworzymy cykl w następujący sposób:

Poruszamy się tylko po elementach bazowych (dodatnich).

Mamy już element półcyklu dodatniego więc należy teraz stworzyć element półcyklu ujemnego. Szukamy w wierszu, w którym stoimy elementu bazowego, takiego który z kolei będzie miał element bazowy w kolumnie. Jest nim element o wartości 35 - zaznaczamy go znaczkiem "-" (Tabelka.4.).

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25	5	0	30
0	0	5	5	10
0 +	0	0	35 -	35

Tabelka.4. Rozw. dopuszczalne. Naniesiony I element półcyklu ujemnego

Mając element półcyklu ujemnego tworzymy kolejny element półcyklu dodatniego. Stoimy na komórce stworzonego elementu półcyklu ujemnego. Szukamy w kolumnie, w której stoimy elementu bazowego, który jednocześnie ma element bazowy w wierszu. Jest nim element o wartości 5 - zaznaczamy go znaczkiem "+" (Tabelka.5.).

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25	5	0	30
0	0	5	5 +	10
0 +	0	0	35 -	35

Tabelka.5. Rozw. dopuszczalne. Naniesiony II element półcyklu dodatniego

Stworzywszy element półcyklu dodatniego tworzymy kolejny element półcyklu ujemnego. Stoimy na komórce stworzonego elementu półcyklu dodatniego. Szukamy w wierszu, w której stoimy elementu bazowego, który jednocześnie ma element bazowy w kolumnie. Jest nim element o wartości 5 - zaznaczamy go znaczkiem "-" (Tabelka.6.).

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25	5	0	30
0	0	5 -	5 +	10
0 +	0	0	35 -	35

Tabelka.6. Rozw. dopuszczalne. Naniesiony II element półcyklu ujemnego

W ten sposób dodajemy na zmianę element półcyklu dodatniego i ujemnego do momentu zamknięcia się cyklu (Tabelka.7.).

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25	5 +	0	30
0	0	5 -	5 +	10
0 +	0	0	35 -	35

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25 -	5 +	0	30
0	0	5 -	5 +	10
0 +	0	0	35 -	35

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5 +	0	0	15
0	25 -	5 +	0	30
0	0	5 -	5 +	10
0 +	0	0	35 -	35

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10 -	5 +	0	0	15
0	25 -	5 +	0	30
0	0	5 -	5 +	10
0 +	0	0	35 -	35

Tabelka.7. Kolejne kroki tworzenia cyklu

Mamy stworzony cykl. Należy teraz znaleźć wartość minimalną wśród elementów cyklu ujemnego - poczym odjąć tą wartość od wszystkich elementów cyklu ujemnego oraz dodać do wszystkich elementów cyklu dadatniego.

Elementami cyklu ujemnego są: 35, 5, 25, 10. Najmniejszą spośród nich jest 5 i tę liczbę odejmujemy od elementów cyklu ujemnego i dodajemy do elementów cyklu dodatniego. W wyniku czego otrzymujemy nowe rozwiązanie dopuszczalne (Tabelka.8.).

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
5	10	0	0	15
0	20	10	0	30
0	0	0	10	10
5	0	0	30	35

Tabelka.8. Nowe rozwiązanie dopuszczalne

Procedura cyklu spowodowała, że doszła nam jedna nowa baza (wiersz 5, kolumna 1), oraz jedna nam odeszła (wiersz 4, kolumna 3). Stąd nadal mamy 8 elementów bazowych - rozwiązanie jest zdegenerowane.

Obliczmy koszt nowego rozwiązania dopuszczalnego i porównajmy ze starym (stary koszt = 360)

5	2	1	5
3	1	1	4
1	1	2	3
2	1	5	1
2	1	2	6

koszty

10	0	0	0
5	10	0	0
0	20	10	0
0	0	0	10
5	0	0	30

nowe rozwiązanie dopuszczalne

koszt nowego rozwiązania
5*10 + 3*5 + 1*10 + 1*20 + 2*10 + 1*10 + 2*5 + 6*30 = 315

koszt nowego rozwiązania dopuszczalnego wynosi 315

Tabelka.9. Koszt nowego rozw. dopuszczalnego

Uzyskaliśmy niższy koszt - rozwiązanie jest lepsze. Pozostało teraz sprawdzić metodą potencjałów optymalność rozwiązania i powtórzyć procedurę jeżeli rozwiązanie nie jest optymalne.

Kilka uwag do tworzenia cyklu

1. Na półcykl dodatni (ujemny) składają się minimum 2 elementy a maksymalnie (m+n-1)/2 elementów. Stąd cały cykl ma min 4 elementy (2 dodatnie i 2 ujemne) a maksymalnie m+n-1.

2. W jednym wierszu (kolumnie) może być 0 lub 2 elementy półcyklu (półcykl dodatni i ujemny)

3. Gdy zdarzy się, że będzie kilka takich samych wartości minimum w cyklu ujemnym i odejdzie nam więcej niż jeden element bazowy należy je przywrócić z powrotem. Pozbywamy sie tylko jednej bazy (tej o najwyższym koszcie) natomiast pozostałym wyzerowanym bazom nadajemy pomijalnie małą wartość eta (np: eta = 10E-10). W ten sposób zawsze mamy rozwiązanie zdegenerowane. Przykład takiego postępowania można zobaczyć na nastęnej stronie (Dokończenie zadania).

3.5.2 Dokończenie zadania

Punkt **Problem transportowy** oraz wszystkie jego podpunkty są kontynuacją obliczania pewnego zagadnienia transportowego, które w tym punkcie ostatecznie rozwiążemy.

Przypomnijmy co do tej pory wyliczyliśmy.

Oto nasz problem:

dostawcy

odbiorcy

20	30	10	40		
P1	P2	P3	P4		
5	2	1	5	S1	10
3	1	1	4	S2	15
1	1	2	3	S3	30
2	1	5	1	S4	10
2	1	2	6	S5	35

koszty

Tabelka.1. Zagadnienie transportowe - dane

Uzyskaliśmy rozwiązanie dopuszczalne trzema metodami: pn.-zach. kąta, najmniejszego elementu, VAM. Przy czym tylko metodą pn.-zach. kąta uzyskaliśmy rozwiązanie zdegenerowane.

baz: 8 -> rozw. zdegenerowane

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
10	5	0	0	15
0	25	5	0	30
0	0	5	5	10
0	0	0	35	35

elementy niebazowe elementy bazowe a)

baz: 7 -> rozw. niezdegenerowane

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	15	0	0	15
20	10	0	0	30
0	5	0	5	10
0	0	0	35	35

elementy niebazowe elementy bazowe b)

baz: 7 -> rozw. niezdegenerowane

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	0	0	15	15
20	0	0	10	30
0	0	0	10	10
0	30	0	5	35

elementy niebazowe elementy bazowe c)

Tabelka.2. Rozwiązanie dopuszczalne otrzymane metodą: a)pn.-zach. kąta; b) najmniejszego elementu; c) VAM

Następnie dowiedliśmy metodą potencjałów, że rozwiązanie dopuszczalne uzyskane metodą pn.-zach. kąta nie jest rozwiązaniem dopuszczalnym. Dlatego stworzyliśmy dla niego cykl i otrzymaliśmy nowe rozwiązanie dopuszczalne:

20	30	10	40	
10	0	0	0	10
5	10	0	0	15
0	20	10	0	30
0	0	0	10	10
5	0	0	30	35

Tabelka.3. Drugie rozwiązanie dopuszczalne

Nowy koszt: 315

koszt się zmniejszył

Sprawdzamy optymalność rozwiązania metodą potencjałów:

5	3	4	9	a)
5	3	4	9	0
3	1	2	7	-2
3	1	2	7	-2
-3	-5	-4	1	-8
2	0	1	6	-3

5	3	4	9	b)
0	1	3	4	0
0	0	1	3	-2
2	0	0	4	-2
-5	-6	-9	0	-8
0	-1	-1	0	-3

Tabelka.4. Koszty pośrednie (a) i wskaźniki optymalności (b)

Nie wszystkie wskaźniki są niedotatnie - **rozwiązanie nie jest optymalne**
Maksymalna wartość wskaźnika to 4. Figurują dwa takie same minima - wybieramy te o mniejszej wartości kosztu w macierzy koszytów

Tworzymy cykl:

20	30	10	40	a)
10	0	0	0	10
5 -	10 +	0	0	15
0	20 -	10	0 +	30
0	0	0	10	10
5 +	0	0	30 -	35

20	30	10	40	b)
10	0	0	0	10
0	15	0	0	15
0	15	10	5	30
0	0	0	10	10
10	0	0	25	35

Tabelka.5. Cykl (a) i nowe rozw. dopuszczalne (b)

Nowy koszt: 295
koszt się zmniejszył

Sprawdzamy optymalność rozwiązania metodą potencjałów:

5	7	8	9	a)
5	7	8	9	0
-1	1	2	3	-6
-1	1	2	3	-6
-3	-1	0	1	-8
2	4	5	6	-3

5	7	8	9	b)
0	5	7	4	0
-4	0	1	-1	-6
-4	0	0	0	-6
-5	-2	-5	0	-8
0	3	3	0	-3

Tabelka.6. Koszty pośrednie (a) i wskaźniki optymalności (b)

Nie wszystkie wskaźniki są nie dodatnie - **rozwiązanie nie jest optymalne**
Maksymalna wartość wskaźnika to 7 - od niego zaczynamy tworzyć cykl.

Tworzymy cykl:

20	30	10	40	a)
10 -	0	0 +	0	10
0	15	0	0	15
0	15	10 -	5 +	30
0	0	0	10	10
10 +	0	0	25 -	35

20	30	10	40	b)
0	0	10	0	10
0	15	0	0	15
0	15	eta	15	30
0	0	0	10	10
20	0	0	15	35

Tabelka.7. Cykl (a) i nowe rozw. dopuszczalne (b)

Z bazy odeszły dwa elementy, jeden o niższym koszcie należy przywrócić - nadając jej wartość eta

Nowy koszt: 225

koszt się zmniejszył

Sprawdzamy optymalność rozwiązania metodą potencjałów:

-2	0	1	2	a)
-2	0	1	2	0
-1	1	2	3	1
-1	1	2	3	1
-3	-1	0	1	-1
2	4	5	6	4

-2	0	1	2	b)
-7	-2	0	-3	0
-4	0	1	-1	1
-2	0	0	0	1
-5	-2	-5	0	-1
0	3	3	0	4

Tabelka.8. Koszty pośrednie (a) i wskaźniki optymalności (b)

Nie wszystkie wskaźniki są niedotatnie - **rozwiązanie nie jest optymalne**
Maksymalna wartość wskaźnika to 3. Figurują dwa takie same minima - wybieramy te o mniejszej wartości kosztu w macierzy koszytów

Tworzymy cykl:

20	30	10	40	a)
0	0	10	0	10
0	15	0	0	15
0	15 -	eta	15 +	30
0	0	0	10	10
20	0 +	0	15 -	35

20	30	10	40	b)
0	0	10	0	10
0	15	0	0	15
0	eta	eta	30	30
0	0	0	10	10
20	15	0	0	35

Tabelka.9. Cykl (a) i nowe rozw. dopuszczalne (b)

Nowy koszt: 180

koszt się zmniejszył

Sprawdzamy optymalność rozwiązania metodą potencjałów:

1	0	1	2	a)
1	0	1	2	0
2	1	2	3	1
2	1	2	3	1
0	-1	0	1	-1
2	1	2	3	1

1	0	1	2	b)
-4	-2	0	-3	0
-1	0	1	-1	1
1	0	0	0	1
-2	-2	-5	0	-1
0	0	0	-3	1

Tabelka.10. Koszty pośrednie (a) i wskaźniki optymalności (b)

Nie wszystkie wskaźniki są nie dodatnie - **rozwiązanie nie jest optymalne**
Maksymalna wartość wskaźnika to 1. Figurują dwa takie same minima - wybieramy te o mniejszej wartości kosztu w macierzy kosztów

Tworzymy cykl:

a)

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	15 -	0 +	0	15
0	eta +	eta -	30	30
0	0	0	10	10
20	15	0	0	35

b)

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	15+eta	eta	0	15
0	2eta	0	30	30
0	0	0	10	10
20	15	0	0	35

Tabelka.11. Cykl (a) i nowe rozw. dopuszczalne (b)

Nowy koszt: 180

koszt nie uległ zmianie (przesunięcie eta)

Sprawdzamy optymalność rozwiązania metodą potencjałów:

a)

2	1	1	3	
2	1	1	3	0
2	1	1	3	0
2	1	1	3	0
0	-1	-1	1	-2
2	1	1	3	0

b)

2	1	1	3	
-3	-1	0	-2	0
-1	0	0	-1	0
1	0	-1	0	0
-2	-2	-6	0	-2
0	0	-1	-3	0

Tabelka.12. Koszty pośrednie (a) i wskaźniki optymalności (b)

Nie wszystkie wskaźniki są nie dotatnie - **rozwiązanie nie jest optymalne**
Maksymalna wartość wskaźnika to 1.

Tworzymy cykl:

a)

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	15+eta	eta	0	15
0 +	2eta -	0	30	30
0	0	0	10	10
20 -	15 +	0	0	35

b)

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	15+eta	eta	0	15
2eta	0	0	30	30
0	0	0	10	10
20-2eta	15+2eta	0	0	35

Tabelka.13. Cykl (a) i nowe rozw. dopuszczalne (b)

Nowy koszt: 180

koszt nie uległ zmianie (przesunięcie eta)

Sprawdzamy optymalność rozwiązania metodą potencjałów:

a)

2	1	1	4	
2	1	1	4	0
2	1	1	4	0
1	0	0	3	-1
-1	-2	-2	1	-3
2	1	1	4	0

b)

2	1	1	4	
-3	-1	0	-1	0
-1	0	0	0	0
0	-1	-2	0	-1
-3	-3	-7	0	-3
0	0	-1	-2	0

Tabelka.14. Koszty pośrednie (a) i wskaźniki optymalności (b)

Wszystkie wskaźniki są nie dodatnie - **rozwiązanie jest optymalne**

20	30	10	40	
0	0	10	0	10
0	15	0	0	15
0	0	0	30	30
0	0	0	10	10
20	15	0	0	35

Tabelka.15. Rozwiązanie optymalne

Koszt rozwiązania optymalnego: 180

4 Zastosowanie Matlab'a

4.1 Wstęp

Zadania programowania liniowego ZPL postaci:

$$\min_x f^T x \text{ , z ograniczeniami: } \begin{aligned} A \cdot x &\le b \\ Aeq \cdot x &= beq \\ lb \le x &\le ub \end{aligned}$$

gdzie:
f, x, b, beq, lb oraz ub są wektorami, a A i Aeq - macierzami.

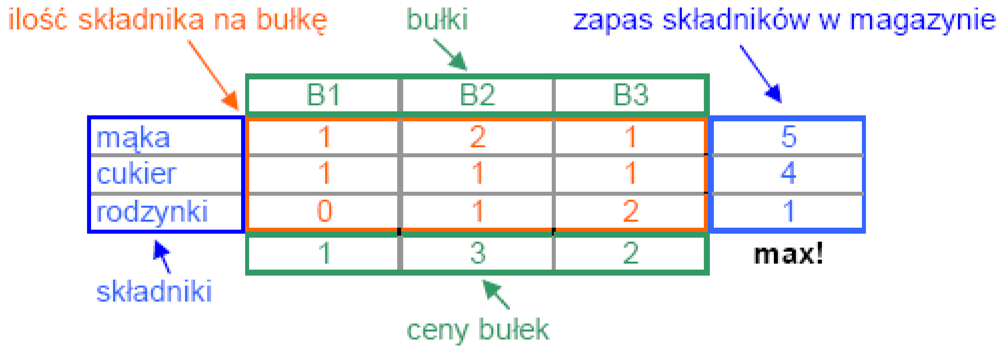
pozwala rozwiązywać funkcja Matlaba **linprog**.

Składnia
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
[x,fval] = linprog(...)
[x,fval,exitflag] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output] = linprog(...)
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(...)

Opis
linprog rozwiązuje ZPL.
x = linprog(f,A,b) - rozwiązuje zdania: min f'*x, z ograniczeniami typu: A*x <= b.
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq) - rozwiązuje powyższe zadanie z dodatkowymi ograniczeniami równościowymi: Aeq*x = beq. Jeśli nie występują ograniczenia nierównościowe wstawiamy A=[] oraz b=[] .
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub) - pozwala określić zakresy dopuszczalnych wartości dla zmiennych decyzyjnych x, co skutkuje tym, że rozwiązanie spełnia warunek lb <= x <= ub. Jeśli nie występują ograniczenia równościowe wstawiamy Aeq=[] oraz beq=[] .
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0) - ustala punkt startowy x0. Opcja ta jest dostępna jedynie dla algorytmów typu MediumScale (parametr LargeScale ma wartość 'off', zmiany wartości parametrów realizuje funkcja optimset). Domyślnie stosowany algorytm typu LargeScale ignoruje zadany punkt startowy.
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options) - postać umożliwiająca ustalenie parametrów dla algorytmu optymalizacji na wartościach określonych w strukturze options. Do określania wartości poszczególnych parametrów służy funkcja optimset.
[x,fval] = linprog(...) - zwraca wartść funkcji celu fun dla uzyskanego rozwiązania x: fval = f'*x.
[x,lambda,exitflag] = linprog(...) - zwraca wartość exitflag, która określa warunki zakończenia obliczeń.
[x,lambda,exitflag,output] = linprog(...) - zwraca strukturę output, zawierającą informacje o przeprowadzonej optymalizacji.
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(...) - zwraca strukturę lambda, której pola zawierają wartości mnożników Lagrange'a dla rozwiązania x.

4.2 Zagadnienie standardowe

Obliczmy zadanie, które wcześniej wyliczyliśmy metodą simpleks.
Poniżej przedstawiona została tabelka z danymi z zadania.



Tabelka.1. Dane do zadania

Jest to standardowe zagadnienie programowania liniowego przy funkcji celu dążącej do maximum.

Postać standardowa układu:

$1x_1 + 3x_2 + 2x_3$ --> MAX

$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 <= 5$
$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 <= 4$
$0x_1 + 1x_2 + 2x_3 <= 1$

$x_1 >= 0$, $x_2 >= 0$, $x_3 >= 0$

Użyjemy funkcji **linprog** o składni:
[x, fval] = **linprog**(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
w wyniku jej działania otrzymamy wektor x z rozwiązaniem oraz zysk pod zmienną fval.

Przygotujmy dane wejściowe do funkcji linprog:

-> wektor f
Wektor współczynników funkcji celu lub patrząc na tabelkę - ostatni zielony wiersz:
f=[1 3 2];

-> macierz A
Macierz współczynników lewej strony nierówności lub patrząc na tabelkę - środkowa pomarańczowa ramka:

```
A=[ 1 2 1
    1 1 1
    0 1 2 ];
```

-> wektor b
Wektor liczb znajdujących sie po prawej stronie nierówności lub patrząc na tabelkę - ostatnia niebieska kolumna:

```
b=[ 5
    4
    1 ];
```

-> Macierz Aeq i wektor beq dotyczy równości - w naszym wypadku pozostawiamy je puste:
Aeq=[];
beq=[];

-> Wektor lb:
Wektor ograniczeń dolnych rozwiązania. Każda zienna rozwiązania ma być większa od zera:
lb=[0 0 0];

-> Wektor ub:
Wektor ograniczeń górnych rozwiązania. Nie nakładamy ograniczeń górnych na zmienne rozwiązania:
ub=[];
lub
ub=[inf inf inf]; **inf** - nieskończenie duża liczba

Wstawienie danych do funkcji linprog:
[x, fval] = **linprog**(-f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)

Ponieważ standardowo funkcja linprog liczy minimum f-kcji celu, musimy wektor f wstawić ze znakiem minus - wówczas funkcja wyliczy maximum.

wynik z funkcji:
x =
3.0000
1.0000
0.0000

fval =
-6.0000

Wstawiliśmy znak minus przed wektor f dzięki czemu uzyskaliśmy maximum funkcji celu ale dlatego też uzyskaliśmy zysk ze znakiem minus. Licząc maximum funkcji celu czytamy wartość fval pomijając minus:

$x_1 = 3$
$x_2 = 1$
$x_3 = 0$

zysk = 6

W efekcie uzyskaliśmy ten sam wynik co w metodzie simpleks ale dużo szybciej.

4.3 Zagadnienie transportowe

Obliczmy przy pomocy Matlab’a zagadnienie transportowe, które wyliczyliśmy wcześniej ręcznie.
Poniżej przedstawiona została tabelka z danymi z zadania.

dostawcy

odbiorcy

20	30	10	40		
P1	P2	P3	P4		
5	2	1	5	S1	10
3	1	1	4	S2	15
1	1	2	3	S3	30
2	1	5	1	S4	10
2	1	2	6	S5	35

koszty

Tabelka.1. Dane do zadania

Postać standardowa układu:

$20x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 40x_4$ --> MIN

$5x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 5x_4 = 10$
$3x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 4x_4 = 15$
$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 30$
$2x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 1x_4 = 10$
$2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 35$

$x_1 >= 0$, $x_2 >= 0$, $x_3 >= 0$, $x_4 >= 0$, $x_5 >= 0$

Użyjemy funkcji **linprog** o składni:
[x, fval] = **linprog**(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)

w wyniku jej działania otrzymamy wektor x z rozwiązaniem oraz zysk pod zmienną fval.

Przygotujmy dane wejściowe do funkcji linprog:

-> wektor f

Wektor współczynników lewej strony nierówności lub patrząc na tabelkę - liczby koloru zielonego. Przy czym wartości z tabelki przepisujemy do wektora beq wierszami:
f=[5 2 1 5 3 1 1 4 1 1 2 3 2 1 5 1 2 1 2 6];

-> Macierz A i wektor b

Dotyczą one nierówności wiec w naszym przypadku nie maja miejsca:
A=[];
b=[];

-> Macierz Aeg

Macierz przygotowyjemy w następujący sposób:

- ilość wierszy macierzy = m+n
- ilość kolumn macierzy = m*n

gdzie:

m - liczba odbiorców (m=5),

n - liczba dostawców (n=4).

Pierwsze m-wierszów wypełniamy następująco:

Dzielimy sobie każdy wiersz na m-grup po n-liczb (tutaj 5 grup po 4 liczby każda). Następnie wypełniamy wszystkie zerami tylko grupę **i** w wierszu **i** wypełniamy jedynkami, gdzie **i** to numer kolejnego wiersza (i=1,2,...,m).

Kolejne wiersze od m do m+n wypełniamy następująco:

Również dzielimy sobie każdy wiersz na m-grup po n-liczb (tutaj 5 grup po 4 liczby każda). Następnie wypełniamy wszystkie zerami tylko **i**-tą liczbę w każdej grupie w wierszu **i**+m wypełniamy jedynkami, gdzie **i** = 1,2,...,n.

```
Aeq=[ 1 1 1 1  0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0
      0 0 0 0  1 1 1 1  0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0
      0 0 0 0  0 0 0 0  1 1 1 1  0 0 0 0  0 0 0 0
      0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0  1 1 1 1  0 0 0 0
      0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0  1 1 1 1
      1 0 0 0  1 0 0 0  1 0 0 0  1 0 0 0  1 0 0 0
      0 1 0 0  0 1 0 0  0 1 0 0  0 1 0 0  0 1 0 0
      0 0 1 0  0 0 1 0  0 0 1 0  0 0 1 0  0 0 1 0
      0 0 0 1  0 0 0 1  0 0 0 1  0 0 0 1  0 0 0 1 ];
```

-> Wektor beq

Wektor liczb występujących po prawej stronie równań oraz współczynników funkcji celu.

Patrząc na tabelkę - ostatnia pomarańczowa kolumna oraz pierwszy, niebieski wiersz:

beq=[10 15 30 10 35 20 30 10 40];

-> Wektor lb:

Wektor ograniczeń dolnych rozwiązania. Każda zienna rozwiązania ma być większa od zera:

lb=[0 0 0 0 0];

-> Wektor ub:

Wektor ograniczeń górnych rozwiązania. Nie nakładamy ograniczeń górnych na zmienne rozwiązania:

ub=[];

lub

ub=[inf inf inf inf inf]; **inf** - nieskończenie duża liczba

Wstawienie danych do funkcji linprog:

[x, fval] = **linprog**(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)

wynik z funkcji:

x =
0.0000
0.0000
10.0000
0.0000
0.0000
6.2311
0.0000
8.7689
8.7689
0.0000
0.0000
21.2311
0.0000
0.0000
0.0000
10.0000
11.2311
23.7689
0.0000
0.0000

fval =
180.0000

Otrzymaliśmy więc wynik:

0.0000	0.0000	10.0000	0.0000
0.0000	6.2311	0.0000	8.7689
8.7689	0.0000	0.0000	21.2311
0.0000	0.0000	0.0000	10.0000
11.2311	23.7689	0.0000	0.0000

przy koszcie = 180

Rozwiązanie optymalne różni się od naszego. Koszt otrzymaliśmy ten sam.